RICERCHE

GEOMETRICHE ED IDROMETRICHE

FATTE

NELLA SCUOLA

DEGL' INGEGNERI PONTIFICJ

D' ACQUE E STRADE

l' Anno 1821

MILANO MDCCCXXII
Per Paolo Emilio Giusti Fonditore-Tipografo.

INDICE

SULL'EFFLUSSO

DELL'ACQUA DAI VASI CONICI

DI

GIUSEPPE VENTUROLI

PROFESSORE DI MATEMATICA,
PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DEGL'ISPETTORI D'ACQUE E STRADE,
E DIRETTORE DELLA SCUOLA DEGL'INGEGNERI.

§ I.

Daniele Bernoulli che prima d'ogni altro sperimentò di sottoporre all'analisi il moto dell'acqua sgorgante dalle luci de' vasi, prese a base del suo calcolo questa ipotesi che ciascuna falda del fluido perpendicolare all'asse del vaso nel discender che fa ed avvicinarsi al fondo si mantenga parallela a sè medesima, o più veramente si mantenga sempre perpendicolare all'asse del vaso. Quest'istessa ipotesi adottarono d'Alembert, ed Eulero, i quali analizzando, ciascuno alla sua foggia, questa materia degli efflussi, non si dipartirono mai dalla supposizione del Bernoulli. E veramente una tal supposizione agevola di gran lunga il calcolo; perchè riduce il movimento di tutta la mole fluida al moto d'un punto sopra una data linea, potendosi ciascuno strato considerare come se fosse concentrato in un punto posto in sull'asse del vaso.

Ma procedendo in tal guisa si viene ad assumere per fondamento del calcolo un'ipotesi tutta precaria; il che rende altresì precarie le soluzioni de' problemi, ed incerta la verità e la generalità de' teoremi che dall'analisi si ricavano. Di fatti l'immortale Geometra Ludovico Lagrange ha dimostrato nella Meccanica Analitica che le soluzioni dedotte dalla Teoria del parallelismo degli strati o sia del moto lineare non sono veramente esatte se non quando la larghezza del vaso è infinitesima, ma ponno per altro considerarsi come prossimamente vere riguardando le larghezze del vaso come quantità del primo ordine, e disprezzando la quantità di secondo ordine. Il che ci basta e per conoscere i limiti dell'accuratezza de' risultati, e per ristringerli vieppiù con altre ed altre approssimazioni. Ma contuttociò non si vuol tralasciar di vedere se almeno in qualche caso particolare potesse ottenersi di determinare a tutto rigore il moto dell'acqua effluente. Poichè le determinazioni ipotetiche ed approssimative se bene soddisfanno ai bisogni della pratica, non ponno interamente appagare il genio de' Geometri, sempre intesi ad ottenere, dovunque si può, la suprema accuratezza.

§ II.

Le difficoltà che impediscono la rigorosa soluzione del problema degli efflussi sono del tutto analitiche. La Meccanica de' fluidi ci somministra le equazioni del problema, ma il calcolo integrale non è avanzato al segno da saperle risolvere. Fissando con tre coordinate x, y, z la situazione di ciascun punto d'acqua dopo il tempo t, siano P, Q, R le forze sollecitanti quel punto, ed u, v, w le velocità colle quali esso si muove secondo le tre coordinate rispettivamente, e sia p la pressione che ha luogo in quel punto. Ponendo

$$Pdx + Qdy + Rdz = dK; \; udx + vdy + wdz = dk$$

si hanno queste due equazioni

$$(A) \ldots\ldots \left(\frac{ddk}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dz^2}\right) = 0$$

$$(B) \ldots\ldots dp = dK - d \cdot \left(\frac{dk}{dt}\right) - udu - vdv - wdw$$

La difficoltà consiste, siccome è noto, nell'equazione (A) non essendo trovato sin ora il modo d'integrarla compiutamente. Ritrovato che fosse quest'integrale che dovrebbe contenere due funzioni arbitrarie delle variabili x, y, z e determinate poi queste funzioni mercè le condizioni risultanti dalla figura del vaso, si avrebbe la funzione k espressa per le variabili x, y, z la quale potrebbe eziandio contenere in qualunque modo l'altra variabile t; e di qui facilmente si ricaverebbero i valori delle quattro incognite u, v, w, p.

§ III.

Ora sebbene non si conosca l'integrale completo dell'equazione (A) con tutto ciò nel caso che adesso trattiamo del vaso conico, avviene che si possa assai facilmente scoprirne l'integrale particolare, cioè una funzione k che soddisfaccia all'equazione (A) ed insieme adempia le condizioni richieste dalla figura del vaso. Per il che basterà supporre che le particelle contigue ai lati del vaso conico discendano rasente i lati medesimi; la qual condizione nel caso del vaso conico verticale dee per necessità verificarsi.

L'equazione delle linee descritte da ciascun punto del fluido è contenuta nella proporzione

$$u : v : w :: dx : dy : dz$$

Quest'equazione dee verificarsi anche per la linea descritta da un punto contiguo alla parete, e pel supposto questa linea è il lato stesso del cono. Collocata l'origine delle ascisse nel vertice e preso l'asse del cono per asse delle x, abbiamo per ciascun lato

$$dx : dy : dz :: x : y : z$$

Dunque per le particelle vicine alle pareti del cono dovrà essere

$$u : v : w :: x : y : z$$

per l'adempimento della qual condizione bisogna porre

$$u = Mx; \; v = My; \; w = Mz$$

essendo M una funzion qualunque delle variabili x, y, z.

Quindi sarà $dk = Mxdx + Mydy + Mzdz$. E perchè dk dev'essere una differenziale esatta, è manifesto che M, e per conseguenza anche k dovrà essere funzione di $x^2 + y^2 + z^2$.

Resta che determiniamo questa funzione in modo da soddisfare all'equazione (A). Per tal effetto esprimendo la funzione cercata colla lettera F e i suoi coefficienti differenziali colle lettere F', F'' avremo

$$\left(\frac{dk}{dx}\right)=2xF'\,;\ \left(\frac{ddk}{dx^2}\right)=4x^2F''+2F'$$

$$\left(\frac{dk}{dy}\right)=2yF'\,;\ \left(\frac{ddk}{dy^2}\right)=4y^2F''+2F'$$

$$\left(\frac{dk}{dz}\right)=2zF'\,;\ \left(\frac{ddk}{dz^2}\right)=4z^2F''+2F'$$

onde l'equazione (A) ci dà

$$2(x^2+y^2+z^2)F''+3F'=0\,;\quad \text{ossia}$$

$$\frac{dF'}{d\cdot(x^2+y^2+z^2)}+\frac{3F'}{2(x^2+y^2+z^2)}=0$$

ed integrando

$$F'=\frac{dF}{d\cdot(x^2+y^2+z^2)}=\frac{A}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ed integrando da capo

$$F=k=cost.-\frac{2A}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

Questo è il richiesto valore di k, nel quale poichè A è una costante arbitraria, potremo anche scrivere semplicemente A in luogo del $2A$.

§ IV.

Ottenuto il valore di k se ne ritraggono subito i valori di tutte le incognite. Ed in quanto alle velocità, essendo $u=\left(\frac{dk}{dx}\right)$; $v=\left(\frac{dk}{dy}\right)$; $w=\left(\frac{dk}{dz}\right)$, avremo

$$u=\frac{Ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,;\ v=\frac{Ay}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,;\ w=\frac{Az}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde la velocità assoluta di ciascun punto del fluido sarà

$$U=\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}=\frac{A}{x^2+y^2+z^2}$$

Ed in quanto alla pressione p, siccome niun'altra forza acceleratrice sollecita il fluido fuorchè la gravità g la quale è diretta in senso contrario alle x, avremo $P=-g$, $Q=0$, $R=0$; e l'equazione (B) del § II ci darà

$$gp=C-gx-\frac{dA}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Nelle quali espressioni le indeterminate A, C sono costanti in riguardo alle variabili x, y, z ma ponno contenere in qualsivoglia modo l'altra variabile t, e si determinano nel modo che ben tosto spiegheremo.

§ V.

Frattanto dalle espressioni ritrovate delle velocità si raccoglie 1.° Che tutte le particelle dell'acqua contenuta nel vaso conico discendono per linee rette convergenti al vertice del cono. 2.° Che per un medesimo istante di tempo tutti i punti collocati in una superficie sferica descritta intorno al vertice del cono, e contenuta entro il vaso, discendono con eguale velocità. 3.° Che nello stesso istante le velocità de' punti situati in diverse superficie sferiche sono reciprocamente proporzionali ai quadrati de' raggi di esse superficie; e per conseguenza sono reciprocamente proporzionali alle superficie medesime.

§ VI.

Per determinare le quantità A, C ci gioveremo della condizione che tanto nella suprema superficie dell'acqua quanto nell'infima, la pressione dev'essere eguale alla pressione dell'atmosfera. Siano dunque $x=m$, $x=n$ le ascisse terminate alle due superficie suprema ed infima, e sia π l'altezza della colonna d'acqua equipollente alla pressione atmosferica. Dovrà essere $p=\pi$ quando si ponga $x=m$, $y=o$, $z=o$; e di nuovo quando si ponga $x=n$, $y=o$, $z=o$. Onde le due equazioni

$$g\pi=C-gm-\frac{dA}{m\,dt}-\frac{A^2}{2m^4}$$

$$g\pi=C-gn-\frac{dA}{n\,dt}-\frac{A^2}{2n^4}$$

Sottraendo la prima dalla seconda viene

$$(E)\ldots\ o=g(m-n)-\frac{dA}{dt}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)-\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{m^4}\right)$$

Se il vaso è mantenuto costantemente pieno, quest'equazione non ha che le variabili A e t. Integrandola in modo che $t=o$ renda $A=o$, e facendo per brevità $\dfrac{m-n}{1-\dfrac{n^4}{m^4}}=h$, troveremo

$$A=n^2\sqrt{2gh}\cdot\frac{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}-1}{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}+1}$$

Determinato il valore di A se ne dedurrà facilmente ancor quello di C, avendosi per la prima equazione di quest'articolo

$$C=g(\pi+m)+\frac{dA}{m\,dt}+\frac{A^2}{2m^4}$$

§ VII.

Sostituiti questi valori di A e di C, ottenghiamo l'esatte e complete espressioni della velocità e della pressione in qualsivoglia punto del fluido, ed in qualunque istante del tempo; che saranno

$$U=\frac{n^2\sqrt{2gh}}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}-1}{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}+1}$$

$$p=\pi+m-x-\frac{4mne^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}}{\left(e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}+1\right)^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}-\frac{1}{m}\right\}-hn^4\left\{\frac{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}-1}{e^{\frac{mt\sqrt{2g}}{n^4h}}+1}\right\}^2\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{1}{m^4}\right\}$$

§ VIII.

Chi piglierà la fatica di confrontare questi valori con quelli che si hanno dalla teoria del parallelismo degli strati, ritroverà che per le particelle che discendono lungo l'asse del vaso,

i valori determinati della velocità e della pressione sono precisamente quelli stessi che dalla Teoria del moto lineare si ricaverebbero. E per esserne più facilmente chiariti, osserviamo che essendo $v = \frac{A}{x^2 + y^2 + z^2}$, se qui facciamo $x = n, y = 0, z = 0$ avremo $v = \frac{A}{n^2}$ per la velocità del punto centrale della luce; qual velocità se si prende per la velocità dell'efflusso e si disegna colla lettera c, sarà $A = n^2 c$, e $\frac{dA}{dt} = \frac{n^2 dc}{dt}$. Sostituiti questi valori nell'equazione (E) dell'art. VI. essa diventa

$$0 = g(m - n) - \frac{n^2 dc}{dt}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{n^4}{m^4}\right)$$

che è per appunto la stessa equazione che ci dà la Teoria del moto lineare per la determinazione della velocità dell'efflusso dal vaso conico.

Adunque questa Teoria sebbene inchiuda un falso supposto, con tuttociò nel caso nostro determina aggiustatamente il moto e la pressione nella linea centrale del vaso. Tutta la discrepanza sta in questo, che gli strati che discendono paralleli a sè stessi non sono già le sezioni piane orizzontali, ma sibbene le sezioni sferiche concentriche al vertice del cono. Ond'è che per ottenere la quantità dell'efflusso nell'unità di tempo, ritrovata che siasi la velocità nell'imo punto dell'asse corrispondente all'ascissa $x = n$ non dovremo già moltiplicarla per il piano della luce, ma bensì per la calotta sferica insistente a detto piano, e descritta col raggio n.

Similmente la pressione che ha luogo in un dato punto dell'asse non si mantiene costante nella sezione orizzontale condotta per quel punto, ma bensì in una superficie curva, che tra poco vedremo come si determini.

§ IX.

Il movimento dell'acqua effluente nel primo nascere è un moto equabilmente accelerato, ma in pochi istanti l'accelerazione si va diminuendo, e il moto dopo qualche tempo si può riguardare come equabile, accostandosi la velocità dell'efflusso al suo limite, nel quale essa è dovuta all'altezza h, ossia all'altezza $\frac{m - n}{1 - \frac{n^4}{m^4}}$. Che se la superficie dell'acqua nel vaso è molto ampia in confronto della luce, la velocità permanente dell'efflusso è dovuta all'altezza $m - n$, cioè all'altezza dell'acqua nel vaso, e s'acquista in un tempo brevissimo e quasi impercettibile; tutto ciò è conforme ai risultamenti della Teoria del moto lineare.

§ X.

Se il vaso non è mantenuto costantemente pieno, nell'equazione (E) dell'art. VI l'altezza m sarà variabile; ond'e forza ricorrere ad un'equazione ausiliaria per eliminare da quell'equazione una delle tre variabili A, m, t. Ora nell'istante dt mentre la superficie suprema discende per lo spazio dm, la superficie infima, alla quale compete la velocità $\frac{A}{n^2}$, discende per lo spazio $\frac{A\,dt}{n^2}$. Questi spazj debbon essere tra loro in ragione inversa dalle rispettive sezioni (*Art.* V) e queste sezioni sono superficie sferiche concentriche che stanno fra loro come $m^2 : n^2$.

Dunque dovrà essere

$$-dm : \frac{A\,dt}{n^2} :: n^2 : m^2$$

onde

$$dt = \frac{-m^2\,dm}{A}$$

Sostituito questo valore del dt, l'equazione (E) si cangia nella

$$(F) \ldots\ 0 = g(m-n) + \frac{A\,dA}{m^2\,dm}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{m^4}\right)$$

Quest' equazione dovrà integrarsi in modo che quando $A = 0$, m acquisti il noto valore corrispondente all'altezza iniziale dell'acqua entro il vaso. Ricavatone il valore di m espresso per A dovremo sostituirlo nella precedente equazione $dt = \frac{-m^2\,dm}{A}$, e poscia integrar quest'equazione in modo che $A = 0$ renda $t = 0$. E così otterremo come prima il valore di A espresso per t.

Se nell'equazione (F) ponghiamo $A = n^2 c$, disegnando per c la velocità dell'efflusso, essa diviene

$$0 = g(m-n) + \frac{n^4\,c\,dc}{m^2\,dm}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{n^4}{m^4}\right)$$

e l'equazione ausiliare diventa $dt = \frac{-m^2\,dm}{n^2 c}$. Ma queste equazioni sono appunto quelle stesse per le quali si determinerebbe il moto lineare dell'acqua nel vaso conico. Dunque anche nel caso dell' altezza variabile ritroviamo la stessa conformità coi risultati della Teoria del moto lineare, che abbiamo di sopra avvertita nell' art. VIII.

§ XI.

Ritorniamo ora al vaso inesausto; e nulla solleciti di tener dietro alle variazioni iniziali che in brevissimo tempo si terminano, consideriamo il moto già ridotto e costituito in istato di permanenza. In questo stato le quantità A, C sono costanti; ed è $A = n^2\sqrt{2gh}$; $C = g\pi + gm + \frac{g\,h\,n^4}{m^4}$; onde si deducono i seguenti valori della velocità e della pressione in ciascun punto dell'acqua contenuta nel vaso

$$U = \frac{n^2\sqrt{2gh}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$p = \pi + m - x - h\,n^4\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)} - \frac{1}{m^4}\right\}$$

§ XII.

La scala delle pressioni lungo l'asse del vaso si otterà ponendo $y = 0, z = 0$; e sarà

$$p = \pi + m - x - h\,n^4\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{m^4}\right)$$

Poichè la pressione è $= \pi$ nel punto supremo A (*Tav. I. fig.* 1) e torna $= \pi$ nel punto infimo B, conviene che ella sia massima in qualche punto intermedio K. Questo si trova col porre $dp = 0$, e corrisponderà all' ascissa $x = OK = \sqrt[5]{4hn^4}$.

E perchè la pressione da A in K va crescendo, e da K in B decresce sino a tornare $=\pi$ come era nel punto A, convien dire che ad ogni punto P dell'asse preso al disopra di K corrisponda un altro punto Q posto al di sotto di K, nel quale la pressione sia la stessa che nel punto P. Se dicasi $OP=\mu$, $OQ=\mu'$ si avrà per determinare la situazione di questi punti corrispondenti P, Q l'equazione

$$\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}=\mu'+\frac{hn^4}{\mu'^4}$$

Volendosi la scala delle pressioni nel lato del cono, detto Ψ l'angolo che fa il lato coll'asse, avremo $y^2+z^2=x^2\ tang.^2\Psi$ onde la richiesta scala sarà

$$p=\pi+m-x-hn^4\left(\frac{cos.^4\Psi}{x^4}-\frac{1}{m^4}\right)$$

e la pressione massima sul lato corrisponderà all'ascissa $x=\sqrt[5]{4hn^4 cos.^4\Psi}$.

§ XIII.

Discostandoci ora dall'asse, passiamo a ricercare per entro il vaso quelle superficie nelle quali la pressione è costante. Le quali superficie nell'acqua stagnante sono piani orizzontali e diconsi superficie di livello, ma nell'acqua corrente debbon esser per certo superficie curve. La loro figura e situazione anderà variando se il vaso si vuota; ma rimarrà costante se il vaso si mantiene sempre pieno ed il moto è ridotto a permanenza, come qui supponghiamo.

Differenziando il valore di p (*Art.* XI) e ponendo il differenziale eguale a zero, abbiamo

$$dx=2hn^4.\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

ed integrando

$$x=cost.-\frac{hn^4}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Questa è l'equazion generale della superficie di pression costante, dalla quale si vede subito che queste superficie sono generate dalla rotazione d'una curva attorno l'asse del vaso, e l'equazione della curva generatrice sarà

$$x=cost.-\frac{hn^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Volendosi la superficie di pressione costante che passa per un dato punto dell'asse, per esempio pel punto P cui risponde l'ascissa $OP=\mu$, dovrà essere $y=0$ quando $x=\mu$. Quindi si determina $cost.=\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}$, e l'equazione della curva generatrice sarà

$$x^2+y^2=\sqrt{\frac{hn^4}{\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}-x}}$$

§ XIV.

Facciamoci a considerare la figura e le proprietà di questa curva. Primiermente fatto $x=\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}$ viene y infinito; quindi presa $OL=\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}$, l'orizzontale indefinita LL sarà l'asintoto della curva.

Poi fatto $y=0$ per trovare i punti dove la curva taglia l'asse, incontriamo l'equazione

$$x^5-\left(\mu+\frac{hn^4}{\mu^4}\right)x^4+hn^4=0$$

che divisa per $x-\mu$ dà l'equazione di quarto grado

$$x^4-\frac{hn^4}{\mu^4}(x^3+\mu x^2+\mu^2 x+\mu^3)=0$$

Esplorando quest'equazione coi noti criterj si trova aver essa due sole radici reali, una positiva, l'altra negativa. Siano queste $x=\mu'$, $x=-\mu''$; e prendesi $OQ=\mu'$, $Oq=\mu''$. La curva taglierà l'asse nei tre punti P, Q, q.

I primi due punti cadono entro il vaso; anzi siccome si è avvertito (*Art.* XII) che ad ogni punto dell'asse deve necessariamente corrisponderne un altro egualmente premuto e posto dall'altra parte del punto K, così si riscontrerà facilmente che questi due P, Q si corrispondono tra loro nel modo anzi detto. Il terzo punto q cade fuori del vaso, anzi al di sotto del vertice.

Tutta la curva poi è un' iperbola concoidale di quinto ordine con un' ovale conjugata. L'iperbola passa pel punto P superiore al punto K di pression massima, e co' suoi rami infiniti s'accosta perpetuamente all'asintoto LL. L'ovale passa pel punto corrispondente Q inferiore al K, e si rigira in sè stessa, terminandosi nel punto q. La rivoluzione degli archi MPN, RQS compresi entro i lati del vaso genera l'intera superficie, per tutta l'estension della quale la pressione è la medesima.

§ XV.

Se cercasi la superficie d'egual pressione che passa pel punto K di pression massima, troveremo che ivi l'ovale s'annoda colla concoide, e che s'incrociano in K (*fig.* 2) le due sezioni MKN, RKS per tutto il giro delle quali si ha la stessa pressione che nel punto K.

E finalmente se faremo $\mu=m$ per avere la curva MAN (*fig.* 3) che colla sua rotazione genera la suprema superficie dell'acqua: oppure $\mu=n$ per avere la curva RBS che genera la superficie infima; siccome i punti A, B si corrispondono tra loro, essendo la pressione eguale in entrambi, ed è

$$m+\frac{hn^4}{m^4}=n+\frac{hn^4}{n^4}=\frac{m^5-n^5}{m^4-n^4}$$

sarà la curva generatrice di ambedue le superficie compresa dalla medesima equazione

$$x^2+y^2=m^2n^2\sqrt{\frac{m-n}{m^5-n^5-(m^4-n^4)x}}$$

la quale disegna ad un sol tratto e la superficie suprema MAN, e la superficie infima RBS. Quella è prodotta dalla rivoluzione d'un' iperbola concoidale, questa dalla rivoluzione della sua ovale conjugata.

§ XVI.

Non è dunque piana la superficie superiore MAN come si viene a supporre, supponendosi il parallelismo degli strati, ma è concava, e il maggiore avvallamento sovrasta al centro del foro. Il sig. Bossut diligentissimo osservatore de' fenomeni dell'efflusso ci aveva già avvisati di questa specie d'imbuto che si forma alla superficie dell'acqua sovrincombente al foro onde l'acqua sgorga, ed avea notato che quest'imbuto rendesi tanto più manifesto quanto l'acqua nel vaso è più bassa. Questo giudicò egli procedere da qualche irregolare ed accidental movi-

mento che prendesse l'acqua entro il vaso; ma poichè questa cagione non s'accordava troppo bene colla costanza del fenomeno, ebbe ricorso alla pressione della colonna d'aria sovrastante al foro, senza però dichiarare in qual modo questa pressione potesse produrre il divisato effetto. Ora qui la generazione dell'imbuto ci si presenta naturalissima e dedotta dalle sue vere e necessarie cagioni; ed è pur facile il ricavare dalle nostre formole che l'imbuto dev'essere tanto più apparente, quanto si vien facendo minore la quantità $\frac{m}{n}$.

§ XVII.

Fin qui abbiamo considerato il vaso conico eretto coll'asse verticale. Sia ora l'asse obbliquo. Ritenendo che le particelle contigue ai lati discendono lungo i lati medesimi, l'equazione (A) dell'art. II si risolverà nello stesso modo, e se ne ricaveranno gli stessi valori di u, v, w, onde la velocità assoluta sarà tuttavia

$$U = \frac{A}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se prendiamo per piano delle x ed y il piano verticale che passa per l'asse, e chiamiamo ϕ l'inclinazione dell'asse alla verticale, avremo le forze acceleratrici $P = -g\cos.\phi$, $Q = -g\sin.\phi$, $R = 0$; onde la pressione nello stato permanente sarà espressa dall'equazione

$$gp = C - gx\cos.\phi - gy\sin.\phi - \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

E determinate le costanti A, C nel modo di sopra dichiarato, si avrà per lo stato permanente

$$U = \frac{n^2\sqrt{2gh\cos.\phi}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$p = x + (m - x)\cos.\phi - y\sin.\phi - hn^4\cos.\phi \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{1}{m^4} \right\}$$

§ XVIII.

Di qui potrà ricercarsi come nell'Art. XII la scala delle pressioni e nell'asse, e in ciascun lato del cono. E quanto all'asse troveremo che il punto K della massima pressione corrisponde all'ascissa $x = \sqrt[5]{4hn^4}$ come nel vaso verticale; e che i due punti corrispondenti ed egualmente premuti P, Q si determinano colla stessa equazione $\mu + \frac{hn^4}{\mu^4} = \mu' + \frac{hn^4}{\mu'^4}$. Dal che si vede che mutandosi l'obbliquità del vaso, variano bensì le pressioni, ma non resta punto alterato nè il sito K della pressione massima, nè la situazione de' punti corrispondenti che al di sopra e al di sotto di K sostengono pressioni uguali.

Volendosi poi le pressioni sui lati sia α l'angolo che fa il piano delle x, y col piano condotto per l'asse e per il lato, e sia Ψ l'angolo che fa l'asse con ciascun lato del cono; avremo $y = x\cos.\alpha\, tang.\Psi$, $z = x\sin.\alpha\, tang.\Psi$ onde $x^2 + y^2 + z^2 = x^2(1 + tang.^2\Psi) = \frac{x^2}{\cos.^2\Psi}$

Quindi la pressione sul lato sarà

$$p = x + (m - x)\cos.\phi - x\sin.\phi\, tang.\Psi\cos.\alpha - hn^4\cos.\phi\left(\frac{\cos.^4\Psi}{x^4} - \frac{1}{m^4}\right)$$

il di cui massimo corrisponde all'ascissa

$$x = \sqrt[5]{\frac{4hn^4\cos.^4\Psi}{1 + tang.\phi\, tang.\Psi\cos.\alpha}}$$

§ XIX.

Passando a ricercare la superficie d' egual pressione, e per ciò eguagliando a zero il differenziale del valore di p (*Art.* XVII) e poscia integrando, avremo

$$x\cos.\phi + y\sin.\phi = cost. - \frac{h n^4 \cos.\phi}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

onde la cercata superficie nasce dalla rotazione d' una curva che si raggira intorno l' asse verticale OX (*fig.* 4) eretto pel vertice del cono. L' equazione della curva generatrice considerata nel piano delle x, y e riferita alle coordinate $OP = x$, $PY = y$ è

$$x\cos.\phi + y\sin.\phi = cost. - \frac{h n^4 \cos.\phi}{(x^2+y^2)^2}$$

e determinando la costante in modo che la curva passi per un dato punto dell' asse OA cui corrisponda l'ascissa $x = \mu$, sarà $cost. = \mu\cos.\phi + \frac{h n^4 \cos.\phi}{\mu^4}$, e sarà l'equazione della curva

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{h n^4}{\mu + \frac{h n^4}{\mu^4} - x - y\,tang.\,\phi}}$$

Le intersezioni di questa curva coll'asse OA si determinano col porre $y = 0$; donde abbiamo l' equazione

$$x^5 - \left(\mu + \frac{hn^4}{\mu^4}\right) x^4 + h n^4 = 0$$

che è per appunto la stessa che si trovò all'Art. XIV per il caso dell'asse OA verticale. Pertanto sebbene la curva di pression costante che passa per un dato punto dell'asse sia molto diversa nel vaso verticale, e nel vaso obbliquo, contuttociò la situazione dei tre punti P, Q, q nei quali essa taglia l' asse OA è assolutamente la stessa o sia quest' asse verticale, o sia in qualunque modo inclinato.

§ XX.

Ma per conoscere e disegnare la figura della curva torna meglio riferirla all' asse verticale OX attorno al quale è simmetrica, e sopra cui rivolgendosi produce la superficie di pression costante. Perciò muteremo le coordinate pigliando sulla verticale l'ascissa $OX = r$, e l'ordinata orizzontale $XY = s$, ed essendo l'angolo $AOX = \phi$ avremo

$r = x\cos.\phi + y\sin.\phi$; $s = x\sin.\phi - y\cos.\phi$ ed $r^2 + s^2 = x^2 + y^2$; onde l'equazione della curva riferita alle coordinate r, s sarà

$$r = cost. - \frac{h n^4 \cos.\phi}{(r^2+s^2)^2}$$

E volendosi determinar la costante in modo che la curva passi per il punto P rispondente all' ascissa $x = \mu$, si dovrà porre $x = \mu$, $y = 0$; ossia $r = \mu\cos.\phi$, $s = \mu\sin.\phi$; onde l'equazione diverrà

$$r^2 + s^2 = \sqrt{\frac{hn^4 \cos.\phi}{\mu\cos.\phi + \frac{h n^4 \cos.\phi}{\mu^4} - r}}$$

nella quale si vede che prendendo $r = \mu\cos.\phi + \frac{h n^4 \cos.\phi}{\mu^4}$ viene l'ordinata s infinita; e per

conseguenza se si prende sull'asse del vaso la $OL = \mu + \frac{hn^4}{\mu^4}$, l'orizzontale indefinita LL sarà l'asintoto della curva.

Per descriver la curva che colla sua rivoluzione produce la suprema superficie MAN, ed insieme l'infima RBS, bisogna porre $\mu = m$, oppure $\mu = n$, avendosi egualmente nell' una e e nell' altra posizione l' equazione della curva

$$r^2 + s^2 = m^2 n^2 \sqrt{\frac{(m-n)\cos.\phi}{(m^5-n^5)\cos.\phi-(m^4-n^4)r}}.$$

generatrice della superficie cercata.

Questa curva sarà un'iperbola concoidale terminata dall'asintoto LL, e sarà congiunta colla sua ovale conjugata come si presenta nella fig. 5, o veramente pura come si mostra nella fig. 6, secondo che l' equazione

$$r^5 - \frac{m^5-n^5}{m^4-n^4} r^4 \cos.\phi - \frac{m-n}{m^4-n^4} m^4 n^4 \cos.\phi = 0$$

che dà le intersezioni della curva coll'asse OX, avrà o tre radici reali, o una sola.

NUOVA

FORMOLA IDROMETRICA

DEL

SIG. EYTELWEIN

Confermata con diverse sperienze fatte in Italia, e corredata d'una Tavola per facilitarne l'uso.

L'Acqua passando dalla quiete al moto, o nell'uscire dalle vasche delle proprie fonti, o nello squagliamento delle nevi, o in altra maniera, acquista nella discesa per gli alvei de' fiumi che sono altrettanti piani per lo più inclinati all'orizzonte qualche grado di velocità: ma questa ben presto si riduce all'equabilità per le resistenze che incontra l'acqua al suo moto. Così Guglielmini al Cap. IV del suo Trattato della natura de' fiumi. *E che ciò veramente succeda ne' fiumi*, soggiunge Eustachio Manfredi nelle sue annotazioni a quel luogo, *assai manifesto indizio ne fa l'esperienza, mostrando che nelle sezioni egualmente larghe, comechè in siti assai lontani fra loro, trovasi a un di presso la medesima altezza viva d'acqua; onde ne' tratti più regolari, ancorchè assai lunghi, la superficie si osserva parallela o quasi parallela al fondo benchè inclinato all'orizzonte: anzi ancorchè alle sezioni più anguste ne vadano alternatamente succedendo delle altre alquanto più larghe per brevi tratti, pure si mantiene il detto parallelismo......* il che *mostra un' equabilità sensibile di velocità media.*

Questo stato di equabilità e di permanenza è così frequente che nei fiumi di alveo non troppo irregolare può quasi dirsi universale, avvegnachè eccettuando i tratti molto vicini o all'origine, o agli sbocchi, o all'incontro d'ostacoli cagionanti rigurgito, e fuor de' tempi del crescere e del calar delle piene, in ogni altro luogo e tempo il corso d'un fiume perenne dura sensibilmente equabile e permanente.

Quindi è che gl'Idrometri si sono principalmente applicati a studiare questo stato ordinario de' fiumi, ed hanno tentato di scoprire qual sia il grado di velocità equabile che compete ad un fiume scorrente per un letto di data figura e pendenza. E dacchè si sono avveduti che per la soluzione di questo problema la teorica non dà sufficienti ajuti, si sono rivolti a ricercarla dall'esperienza misurando la velocità media in molte e molte correnti di varia sezione e pendenza, per indi comporre una formola atta a rappresentare i risultati delle sperienze fatte, e discoprire per questa via indiretta la legge delle resistenze che frenano e riducono all'equabilita la corrente dell'acqua. In simil guisa gli astronomi conobbero da prima i movimenti de' pianeti per via di tavole dedotte dalla serie di molte e molte osservazioni, dalle quali poscia il Keplero

ricavò la figura delle orbite loro, ed appresso il Neuton la legge della forza che in quelle orbite li ritiene.

Dubuat fu il primo che dopo aver fatti molti esperimenti con canaletti artefatti e qualche osservazione sopra un canale di scolo e sopra il fiume Hayne, ne compose con molto studio una formola idrometrica (1). Appresso l'ingegnere Girard immaginò una formola assai più semplice (2). E finalmente Prony approffittando delle ricerche de' suoi antecessori, ritenne la formola di Girard, ma ne determinò con maggiore accuratezza i coefficienti. La formola di Prony (3) è ricavata da trentuna sperienze, e risponde assai bene a tutte. Se non che quelle sperienze sono quasi tutte in piccoli corsi d'acqua, e lascian dubbio se i loro risultati possano sicuramente tradursi alle ampie sezioni de' canali navigabili e de' fiumi: potendo essere che ne' grandi letti la resistenza segua per avventura altra legge, o che almeno i coefficienti della formola che la esprime, non siano più quegli stessi. Quindi si desiderava tuttavia a maggior illustrazione di questo importante e principal Problema della scienza idrometrica *una serie d'osservazioni ben fatte sui tratti più regolari ed uniformi di varie correnti, ove si notassero accuratamente le dimensioni dell'alveo, la sua pendenza e la velocità media* (4).

A questo desiderio degli studiosi dell'idrometria ha ottimamente servito il sig. Eytelwein, raccogliendo le sperienze fatte in grande dagl'ingegneri tedeschi Brünings, Funk e Woltmann sul Reno di Germania, sul Weser, e su varj canali di scolo. Ed aggiungendovi quelle di Dubuat, ne ha formata una serie di novantuna sperienze che per verità abbraccia, come era a desiderarsi, una grandissima diversità d'accidenti. Poichè vi sono delle sezioni piccolissime di metri quadrati 0,015 e ve ne sono delle grandissime sino a metri quadrati 2600; dovechè nelle sperienze adoperate da Prony l'ampiezza della sezione non oltrepassa 29 metri quadrati. E le pendenze variano pure moltissimo, essendo le minori di $\frac{3}{10000}$, e le maggiori di $\frac{1}{100}$. E similmente le velocità medie, delle quali la più piccola è di metri 0,12 al minuto secondo, e la maggiore arriva sino a metri 2,4. Da questo copioso apparato d'esperienze ha egli ritratto una nuova formola, o piuttosto ha riprodotta quella stessa di Girard e di Prony, ma con coefficienti alquanto diversi.

La formola corrisponde con molta aggiustatezza alle osservazioni, come si vedrà nel prospetto aggiunto a questa memoria. E quindi sembra che ora si possa con maggior probabilità tener per vera quella legge della resistenza che fu supposta da Coulomb e che viene rappresentata dalla formola di Girard; vale a dire che la resistenza che incontrano le acque correnti abbia due termini, l'uno proporzionale al quadrato della velocità, l'altro alla velocità semplice; e che sia inversamente proporzionale al *raggio medio*, o sia all'area della sezione divisa per il perimetro bagnato dall'acqua.

La Memoria del sig. Eytelwein trovasi fra quelle della Reale Accademia di Berlino per gli anni 1814, 1815: Parte Matematica pag. 135 e seguenti. Poichè questo libro non può essere così facilmente alle mani di tutti, si è pensato di divolgarne la notizia agli Allievi della Scuola, ed agl'ingegneri Italiani col riportar qui la nuova formola idrometrica, e la serie delle sperienze dalle quali si è dedotta, aggiuntevi altre sperienze di simil genere fatte in Italia; e

(1) *Dubaut, Principes d'Hdraulique, Part. I, Sect. I, Chap. 7.*
(2) *Girard, Essai sur le mouvement des eaux courantes. Paris 1804.*
Rapport sur le projet du canal de l'Ourcq. Paris 1803.
(3) *Prony, Recherches sur la théorie des eaux courantes* § 16.
(4) *Venturoli, Elementi di Meccanica e d'Idraulica Tom. II, art. 322.*

col calcolare una Tavola, dalla quale, data la sezione e la pendenza del letto, si trovi a colpo d'occhio la velocità media, senza che sia d'uopo calcolarla per via della formola.

Formola di Eytelwein.

Sia D il raggio medio, cioè l'area della sezione divisa per quella parte del suo contorno che resta bagnata dall'acqua: sia $cos.\,\phi$ il coseno dell'inclinazione dell'alveo alla verticale; il qual coseno si trova dividendo la caduta o sia l'altezza del punto superiore sopra l'inferiore per la lunghezza del tratto intermedio fra questi due punti: sia g la gravità, che si esprime col doppio dello spazio che percorre un grave cadendo nel vuoto durante un minuto secondo: e sia finalmente u la velocità media. Sarà

$$(O) \qquad u = -0{,}00338375\,g + \sqrt{(0{,}00001145\,g^2 + 278{,}899\,Dg\,cos.\,\phi)}$$

Questa è la formola del sig. Eytelwein.

Prendendo per unità delle misure lineari il metro, sarà $g = 9{,}8088$ e si avrà la formola

$$u = -0{,}03319 + \sqrt{(0{,}0011 + 2735{,}66\,D\,cos.\,\phi)}$$

della quale si farà uso quando si misura a metri; e ne verrà pure in metri la velocità, o sia il numero di metri che l'acqua percorre in un minuto secondo.

Per vedere qual sia secondo la formola di Eytelwein la misura e la legge della resistenza che incontra l'acqua scorrendo per lo declive degli alvei, osserviamo che chiamando gR questa resistenza, allorchè il moto si è ridotto all'equabilità dovrà essere $gR = g\,cos.\,\phi$, ossia $R = cos.\,\phi$. Ma la formola ossia l'equazione (O) può mettersi sotto quest' altra forma

$$(O) \qquad 0{,}00717\cdot\frac{u^2}{2gD} + 0{,}000024\cdot\frac{u}{D} = cos.\,\phi$$

Dunque secondo la predetta formola, abbiamo

$$R = 0{,}00717\cdot\frac{u^2}{2gD} + 0{,}000024\cdot\frac{u}{D}$$

Ha dunque l'espressione della resistenza due termini; l'uno proporzionale al quadrato della velocità ossia all'altezza $\frac{u^2}{2g}$ dovuta ad essa velocità; l'altro proporzionale alla velocità semplice; entrambi i termini sono inversamente proporzionali al raggio medio D; ed il coefficiente del primo termine è 0,00717, ed il coefficiente del secondo è 0,000024.

Sperienze che comprovano la formola di Eytelwein.

Le sperienze colle quali il sig. Eytelwein calcolò i coefficienti della sua formola sono state fatte da diversi osservatori, in diverse correnti, e la velocità media è stata esplorata con diversi artificj. Citeremo i luoghi degli autori presso i quali potrà vedersi come furon condotte.

Quelle di Dubuat (1) sono in numero di 36. Ventisei con un canale artefatto; sei in uno scolo chiamato *Canal du Jard;* e quattro nel fiume Hayne ad acqua bassa. La maggior sezione non è che di 29 metri quadri.

Le quattro sperienze di Woltmann (2) si fecero in alcuni canali di scolo presso Cuxhave e Ritzebuttel.

(1) *Dubuat. Principes d'hydraulique, Part. II, Sect. I, Chap.* 5 *et* 8.
(2) *Woltmann. Beiträge zur Baukunst schiftbärer kanäle*, § 279.

Quelle di Funk (1) sono state fatte sul fiume Weser nel principato di Minden, sono in numero di 35. Qui le sezioni sono assai maggiori ed arrivano sino a 600 e più metri quadrati.

Ma le sperienze più in grande sono le 16 di Brünings (2) nel Reno di Germania, nel Waal, e nell' Yssel, dove abbiamo una sezione persino di 2600 metri quadri.

Così le sperienze delle quali ha fatto uso il sig. Eytelwein sono in tutto novantuna.

Giova aumentare questa serie con inserirvi di mano in mano le altre misure idrometriche che si verranno facendo, perchè con riscontri quanto più si può moltiplicati e variati o conseguiremo sempre maggior certezza della formola, o avremo dati per correggerla dove incontrasse eccezioni di notabil momento. In frattanto possiamo accrescerla d'alcune sperienze di fresco fatte in Italia.

I. E primieramente abbiamo tre diligentissime sperienze fatte nell'antunno del 1819 dal sig. Professore Giorgio Bidone ne' canaletti dello stabilimento idraulico della Reale Università di Torino (3). L'autore ne ha fatto il confronto colla formola di Eytelwein, e torna esattissimo.

II. Esporremo in secondo luogo le prove che si sono fatte sul maggiore tra' fiumi d'Italia. Il Cav. Teodoro Bonati già ispettore d'Acque e Strade, di chiara ed onoratissima memoria, ha ricercato con aste ritrometriche la misura dell'acqua di Po in tre diversi stati, in magra, in acqua mezzana ed in piena. Queste sperienze sono descritte in una Memoria sinora inedita che si crede verrà in luce tra quelle dell'Istituto. Eccone intanto un transunto.

In acqua bassa li 19 dicembre 1811 fu presa una sezione di Po poco sotto Lagoscuro. Era il pelo d'acqua inferiore al segno di guardia metri 3,83. La sezione era larga in sommità metri 606,26; la profondità dell'acqua nel filone era di m. 3,42, ma la profondità ragguagliata tra quelle di cinque perpendicolari risultò di m. 2,67. L'area della sezione fu m. q. 1617,4079 il perimetro bagnato fu all'incirca m. 612,09 onde il raggio medio $D = 2,64$.

Un po' al di sopra di ciascuna delle cinqne perpendicolari fu buttata un' asta ritrometrica, e fu osservato il tempo che mise a percorrere un tratto di misurata lunghezza che in questa sperienza fu di m. 80,96; donde era facile dedurre la velocità del suo corso. Le aste per poco non arrivavano al fondo, poichè l'estremità inferiore non ne rimaneva distante se non che m. 0,40 all'incirca; e camminavano parallele alle sponde, e presso che verticali; onde non può dubitarsi che la loro velocità non rappresenti prossimamente la velocità media dell'acqua nelle rispettive perpendicolari. Osservata la velocità di ciascun' asta, si procedeva al calcolo della portata in questo modo. In ciascun trapezio compreso tra una perpendicolare e l'altra si considerò che la velocità meida fosse la media aritmetica tra le velocità osservate nelle due perpendicolari estreme; e così moltiplicando questa velocità per l'area del trapezio veniva a conoscersi la quantità d'acqua che in un minuto secondo passava per quel trapezio. Quanto ai due triangoli estremi terminati da una sola perpendicolare, si fece conto la velocità media essere quella stessa della perpendicolare contigua. E sommate insieme le portate di tutte le figure componenti la sezione, si avea la portata della sezione intera.

In tal modo si trovò che nella sopradetta sezione passavano in ogni minnto secondo metri cubi d'acqua 1110,40. Dividendo qnesta portata per l'area della sezione già misurata di m. q. 1617,4079 risulta la velocità media di m. 0,687.

In acqua mezzana si rinnovò qnivi stesso l'esperimento nel dì 30 maggio 1812, trovandosi

(1) *Funk. Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst.* § 97-100.

(2) *V. Allgemeine Wasserbaukunst von Wiebeking.* 1 *theil* § 344-388.

(3) *Bidone. Experiencès sur le remou et sur la propagation des ondes. Part. I, art. VII. Memoires de l'Acad. R. de Turin, Tom. XXV.*

il Po sotto il segnale di guardia tre metri. La profondità massima nel filone fu di m. 4,09, ma la profondità ragguagliata riuscì di m. 3,78. L'area della sezione m. q. 2299,6967; il perimetro bagnato m. 615,57; onde il raggio medio $D = 3,736$. Osservate le velocità dell'asta in cinque perpendicolari, e calcolata come sopra la portata dell'intera sezione, si ebbero m. c. 1693,12. Dividendo questa portata per l'area della sezione viene la velocità media di m. 0,736.

Finalmente nel colmo d'una grossa piena che a Lagoscuro sorpassò di m. 1,837 il segno della guardia, rimanendo per m. 0,676 più bassa del segno delle piene massime, si volle misurare l'acqua del Po coll'asta ritrometrica, unico mezzo da potersi tentare in questo stato di fiumi. Ciò fu nel giorno 12 giugno 1815.

Fu misurata una sezione di Po dirimpetto a Francolino, e l'area ne fu trovata di metri q. 3734,5601 e il perimetro bagnato di m. 527,20, onde il raggio medio $D = 7,08$. La profondità ragguagliata era di m. 7,32, ma la profondità massima nel filone arrivava a m. 11,97. Osservata la velocità dell'asta in sei perpendicolari, si calcolò la portata della sezione, e fu di m. c. 4739,62. Dividendo questo numero per l'area della sezione, si ha la velocità media di metri 1,269.

Per poter confrontare queste tre misure colla formola di Eytelwein è necessario conoscere la pendenza che ha il Po nel tratto sottoposto alle sperienze. Questo dato ci viene somministrato dal sig. Cav. Bonati. Da Lagoscuro a Francolino, dice egli, tratto di pertiche bolognesi 1360, l'acqua del Po in superficie aveva la pendenza di once tre e due terzi per miglio, in tutto once 10 e punti uno. Di qui si ha $\cos. \phi = 0,0000611$.

Ma se una tal determinazione della pendenza può convenire alle due prime sperienze, nelle quali il Po era a un dipresso nel suo stato ordinario, non può egualmente convenire alla terza nella quale il Po era in piena. Da Lagoscuro in giù il pelo delle piene di Po incomincia a piegarsi sensibilmente verso il pelo basso, ed abbiamo (1) che da Lagoscuro alla chiavica di Racano, tratto di pertiche 3910 il pelo alto si accosta al pelo basso once 17 e punti 7; e tal convergenza si fa anche maggiore da Racano in giù. Ora se in pertiche 3910 il pelo alto s'avvicina al pelo basso per once 17 punti 7, in pertiche 1360 quante sono da Lagoscuro a Francolino s'abbasserà once 6 punti 2. Dunque la caduta del pelo alto da Lagoscuro a Francolino non sarà altrimenti di once 10 punti uno, ma bensì di once 16 punti 3. Ed il coseno che rappresenta la pendenza della superficie invece di 0,0000611 sarà per lo meno 0,0000996.

Adotteremo adunque per le due prime sperienze di Bonati $\cos. \phi = 0,0000611$ e per la terza $\cos. \phi = 0,0000996$; e calcolando dappresso la formola di Eytelwein troveremo per le velocità medie del Po basso, del Po mezzano e del Po alto i seguenti valori 0,632; 0,758; 1,356 non molto discosti dalle velocità effettivamente osservate 0,687; 0,736; 1,269.

III. Paragoniamo ora colla formola di Eytelwein l'esperimento che si fece l'anno scorso dai Professori ed Allievi della nostra scuola in Ferrara (2) sullo stesso Po a Fossa d'Albero, luogo inferiore a Francolino di pertiche 1360. Il dì 11 Giugno 1820 essendo il Po più che mezzano, giacchè trovavasi metri 2,33 sotto il segno di guardia furono rilevate due sezioni distanti fra loro per l'intervallo di 100 metri. La sezione superiore larga in sommità del pelo d'acqua metri

---

(1) *Manfredi, Dialoghi fra Giorgio, Maurelio, ecc. Raccolta d'Acque di Firenze Tom. VI, pag.* 207.

Zanotti, Ragionamento sopra la disposizione dell'alveo de' fiumi verso lo sbocco in mare. Ivi Tom. VII, pag. 5.

(2) *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella Scuola degl' Ingegneri Pontificj l'anno* 1820, *pag.* 11.

394,10 comprendeva l'area di metri q. 2011,18; il perimetro bagnato può stimarsi di m. 405. Nella sezione inferiore larga a fior d'acqua m. 400,26 l'area si trova essere m. q. 1787,14, e il perimetro metri 409. Quindi la sezione media risulta di metri q. 1899,16 col perimetro di m. 407; onde il raggio medio $D = 4,666$. Si fecero correre le aste per cinque perpendicolari e corsero lo spazio di metri 100 nei tempi che sono distintamente indicati nel citato Ragguaglio. Dai quali facendo il calcolo della portata con quella regola che dichiareremo nel dar conto dell'esperimento fatto in quest'anno sul Tevere, ci risulta la portata della sezione media essere di m. c. 2176,64 in ogni minuto secondo. E dividendo questa portata per l'area della sezione si ottiene la velocità media di m. 1,146.

Per rilevare la pendenza fu livellato il pelo del Po, ed in una lunghezza di metri 226,11 si trovò la caduta di m. 0,032 onde il coseno dell'inclinazione alla verticale riuscirebbe 0,0001415. Supposta questa pendenza la formola di Eytelwein mostrerebbe la velocità media di m. 1,311 mentre che la velocità osservata risulta come sopra di soli m. 1,146.

Io però stimo che per determinare l'inclinazione della superficie in un grosso fiume come il Po non dobbiamo punto fidarci d'una sola livellazione di corto tratto; per esser sempre incerta ed incostante la situazione de' segnali posti a fior d'acqua in causa dell'ondeggiamento e dell'instabilità della superficie, e perchè l'errore di poche linee in una caduta piccolissima porta grave errore nella stima della pendenza. E per verità come può credersi che l'inclinazione del pelo mezzano a Fossa d'Albero arrivi a 0,0001415, mentre l'inclinazione del pelo altissimo da Lagoscuro a Racano, nel qual tratto resta compresa la situazione di Fossa d'Albero, non è che di 0,0000996?

Pertanto crederei che messo a parte il rilievo della livellazione fatta a Fossa d'Albero siccome soggetto a troppa incertezza l'inclinazione del pelo di Po in quel tratto non possa stimarsi che tutt'al più di 0,0000996. Dappresso questa stima la velocità calcolata dalla formola viene di m. 1,095 che meglio si avvicina all'osservata di m. 1,146.

IV. Un simile esperimento si è fatto in quest'anno per misurare l'acqua del Tevere, scegliendo un tratto rettilineo, ed abbastanza regolare di questo fiume tra Ponte Molle, e il suo ingresso in Roma. Ciò fu il dì 19 giugno 1821 mentre il pelo del Tevere trovavasi m. 1,17 superiore al piano dell'ultimo grandino del Passo-Porto di Ripetta, vale a dire soli m. 0,73 sopra il pelo della massima magra. Le diligenze usate nel preparare e nell'eseguire la sperienza, e tutti i rilievi e calcoli dai quali emerge la determinazione della portata del fiume sono minutamente riferite nel Ragguaglio che se ne dà a parte. Qui basterà indicare che la sezione media del tratto prescelto si trovò di m. q. 218,779; il suo contorno bagnato dall'acqua m. 76,72; onde il raggio medio $D = 2,852$. Ricercata con esquisito livello l'inclinazione del pelo d'acqua si trovò cadere m. 0,032 nella lunghezza di m. 245; onde $cos. \varphi = 0,0001306$. Con questi dati la formola di Eytelwein dà la velocità media $=$ m. 0,977. D'altra parte la portata della sezione rilevata mediante il calcolo del movimento delle aste, riesce di m. q. 244,0554 come si vedrà nel Ragguaglio; e questa divisa per la sezione media, ne dà la velocità media effettiva $=$ m. 1,115. Qui la velocità osservata sorpassa la velocità calcolata di circa un dodici per cento. Ma questa differenza vuolsi per molta parte attribuire a un difetto dell'osservazione, che non può mai del tutto evitarsi quando si misura colle aste ritrometriche, le quali non potendo mai farsi tanto lunghe che arrivino sino al fondo, lascian fuori quella parte della sezione dove la velocità è più ritardata dalla prossimità degl'impedimenti. Allora la velocità dell'asta non rappresenta giustamente la velocità, media della perpendicolare, ma bensì una velocità alquanto maggiore della media. Quindi e la portata e la velocità media della sezione intera calcolata dappresso l'esperimento dee riuscire maggiore del vero. L'eccesso dev'essere tanto maggiore,

3

quanto è maggiore il decremento della velocità nelle parti vicine al fondo; e questo decremento nel caso nostro era assai notabile, come si fa manifesto per varj esperimenti che a bella posta si sono fatti per averne prova, e che si potranno osservare nel Ragguaglio più volte accennato.

Tavola per facilitare l'uso della formola di Eytelwein.

Rilevato dalle misure della sezione il raggio medio D, e dalla livellazione il valore di $cos.\,\varphi$, e quindi il prodotto $D\,cos.\,\varphi$, si ha dall'equazione (O) la velocità media; e moltiplicando questa per l'area della sezione, si ha la portata. Per fuggir la fatica di calcolare ad ogni volta l'equazione (O) potremo servirci della Tavola che si soggiunge a questa Memoria. Nella prima colonna sono le velocità u espresse in metri, cominciando da $u = 0,01$ e crescendo di centimetro in centimetro sino ad $u = 3$. Nella seconda colonna vi stanno a fronte i corrispondenti valori del prodotto $D\,cos.\,\varphi$ espressi in diecimilionesimi di metro. Avendosi pertanto in una data sezione il valore di questo prodotto, lo cercheremo nella seconda colonna della Tavola, e vi troveremo a fronte nella prima colonna la velocità media cercata. Che se il preciso valore del $D\,cos.\,\varphi$ non s'incontrasse nella Tavola, cercheremo i due numeri vicini in fra i quali è compreso, e la velocità media sarà tra le due che corrispondono a questi due numeri, e si determinerà colla regola delle parti proporzionali.

Sebbene ad intendere tutto ciò non faccia bisogno d'altra spiegazione, pure in uno scritto destinato all'istruzione de' giovani Ingegneri non sarà fuor di proposito dichiarare con alcuni esempj come si debba far uso della formola di Eytelwein o della Tavola, anche nella soluzione dei problemi secondarj dipendenti dal principal Problema di trovare la velocità media, data che sia la sezione e la pendenza dell'alveo.

Esempio primo. Sesto Giulio Frontino ricercando la misura dell'acqua Appia la più antica delle acque condotte in Roma, credette che bastasse a tal uopo misurare l'altezza e la larghezza dello speco o sia dell'acquedotto. *Inveni altitudinem aquae pedes quinque, latitudinem pedis unius, dodrantis* (1). Essendo il piede antico Romano metri 0,2953 sarà l'altezza m. 1,4765; la larghezza m. 0,517; onde la sezione dello speco m. q. 0,76335; e il perimetro bagnato m. 3,47; onde il raggio medio $D = 0,22$.

Ma per avere la misura della quantità d'acqua i dati di Frontino non bastano; si vuol di più la pendenza dell'aquedotto nel tratto misurato, posto pure che l'acqua vi corresse con moto equabile. Supponghiamo che la pendenza fosse quella minore che si soleva dare agli acquedotti secondo la regola di Vitruvio (2) *ne minus in centenos pedes semipede*, di mezzo piede ogni cento piedi. Sarà dunque $cos.\,\varphi = 0,005$; onde il prodotto $D\,cos.\,\varphi = 0,0011$; ossia 11000 diecimilionesimi.

Questo numero sta nella seconda colonna della Tavola fra i numeri 10977, 11104 ai quali rispondono la velocità 1,70; 1,71. Prendendo la parte proporzionale trovo $u = 1,702$ onde la portata risulta di m. c. 1,2992 per ogni minuto secondo. Questa portata corrisponde a 2598 once d'acqua, secondo la misura dell'oncia che serve qui in Roma alla distribuzione dell'acqua Vergine ritenendo che l'oncia d' acqua è una dispensa di m. c. 0,030 in un minuto. Del resto non si vuol dimenticare che il presente calcolo dell'acqua Appia è fondato in parte sopra dati ipotetici.

(1) *De aquaeductibus urbis Romae Art.* 65.

(2) *Lib. VIII. Cap.* 7.

Esempio secondo. Data la portata massima d'un canale di scolo, la sua pendenza, e l'altezza dell'acqua in esso corrente, determinare la larghezza ragguagliata da darsi alla sezione.

Questo è problema di frequentissimo uso e di grandissima importanza ne' progetti di escavar nuovi scoli. Camminando a tentone è facile il commetter errore o abbondando nella larghezza con soverchio di spesa, o scarseggiando col danno vie maggiore di escavar nno scolo inetto ed insufficiente.

Ora ne mostreremo la soluzione in nn caso pratico. L'ingegnere Astolfi (1) ricercò qual dovesse essere la larghezza da darsi alla Fossa della Botta, scolo delle campagne Pontine alla destra della Via Appia, avendo pria calcolato che la portata massima di questo scolo sarebbe stata di metri cubi 7,968 al minnto secondo, la pendenza 0,0001; e l'altezza dell'acqua per tenerla più bassa delle campagne da scolarsi doveva essere non più di metri 1,787.

Dicasi Q la portata, $cos.\,\phi$ la pendenza, ed h l'altezza dell'acqua, che sono i dati del problema; ed x la larghezza del canale che è l'incognita. Sarà il raggio medio $D = \frac{hx}{x+2h}$, e la velocità media $u = \frac{Q}{hx}$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione (O) del moto equabile, che è $0{,}00717\frac{u^2}{2g} + 0{,}000024\,u = D\cos.\phi$ e poi sostituendo i valori numerici delle quantità cognite $Q = 7{,}968$; $cos.\,\phi = 0{,}0001$; $h = 1{,}787$; si troverà per determinare l'incognita x l'equazione numerica di terzo grado

$$x^3 - 0{,}598\,x^2 - 42{,}792\,x - 145{,}303 = 0$$

dalla quale si caverà per approssimazione la cercata larghezza $x = 8{,}1$.

Ora con più facilità potrà aversi l'intento per via della Tavola mentre in vece di quella equazione di terzo grado potremo più comodamente valerci di quest'altra

$$u - Q\cdot\frac{h-D}{2Dh^2} = 0$$

da risolversi colle false posizioni. Provando per D diversi valori, e conoscendo $cos.\,\phi$ la Tavola ci porge subito i corrispondenti valori di u, onde per ciascuna posizione potrà calcolarsi l'equazione, e rilevato l'errore accostarci sempre più al valore giusto del D; conosciuto il quale, viene a conoscersi la larghezza $x = \frac{2Dh}{h-D}$.

Così nel nostro esempio provando successivamente $D = 1$; $1{,}5$ avremo $D\cos.\phi =$ diecimilionesimi 1000; 1500: onde per la Tavola $u = 0{,}49$; $0{,}61$: ed $u - Q\cdot\frac{h-D}{2Dh^2} = -0{,}49$; $+0{,}37$. Sta dunque D entro i limiti 1; 1,5; e ristringendoli sempre più colla regola delle false posizioni, ben tosto incontriamo $D = 1{,}24$; onde $x = 8{,}1$.

Esempio terzo. Date le sezioni e le pendenze di due fiumi, trovare l'alzamento che seguirà nel secondo immettendovi il primo.

Applicheremo la soluzione del Problema ad nn caso pel quale fu già lungamente desiderata, e caldamente dibattuta: si cerchi l'alzamento che si farebbe nel Po immettendovi il Reno di Bologna; posto l'uno e l'altro fiume in istato di piena.

Secondo le misure riportate da Eustachio Manfredi la larghezza media del Reno è di piedi Bolognesi 139, metri 52,74; e l'altezza delle sue piene piedi 11, metri 4,17. E la larghezza del Po a Lagoscuro è piedi 760, metri 288,37; e l'altezza della piena piedi 30, metri 11,38.

(1) *V. Nicolai, De' bonificamenti delle Terre Pontine pag.* 382.

Questi dati bastavano al Manfredi per risolvere come fece il Problema (1) secondo la teoria del Guglielmini, vale a dire considerando il solido dell' acqua che passa per ciascuna sezione come un solido terminato da una parabola avente il vertice a fior d'acqua. Così si trova che la portata della piena di Reno sta a quella del Pò come 1 : 24,62; e l' alzamento del Po in piena per l' aggiunta della piena di Reno trovasi di metri 0,31.

Volendo ora risolvere il Problema secondo il principio dell' eguaglianza tra le forze impellenti e le resistenti nei fiumi di corso equabile, non bastano le misure delle sezioni, ma di più si ricerca conoscere la pendenza dell'uno e dell'altro fiume. La pendenza del Reno delle livellazioni prese nella celebre visita d'Adda e Barberini nel 1693 risulta di once $14\frac{3}{4}$ per miglio; ossia $\cos.\phi = 0,0002458$. Ed è notabile che nell' esattissima livellazione del Reno fatta nel 1818 dagl' Ingegneri del Corpo d' Acque e Strade, si è riscontrata per l'appunto questa stessa pendenza di once $14\frac{3}{4}$ in tutto il tratto lungo 35 miglia dallo sbocco della Samoggia allo sbocco del Sillaro. Quanto alla pendenza del Po in piena a Lagoscuro, si è stabilito di sopra doversi prendere $\cos.\phi = 0,0000996$.

Di più converrebbe aver misurato il perimetro delle sezioni per ricavarne il raggio medio, ma perchè nei fiumi assai più larghi che profondi il perimetro bagnato dell' acqua è prossimamente eguale alla larghezza più il doppio dell' altezza, noi potremo considerarlo nel Reno di metri 61,08; e nel Po di m. 311,13. Quindi pel Reno sarà il raggio medio $D = 3,601$ onde $D\cos.\phi = 0,0008851$: e pel Po $D = 10,547$ onde $D\cos.\phi = 0,0010505$.

Ciò posto mediante la Tavola si troverà essere nel Reno la velocità media m. 1,52 e la portata m. c. 334,28; e nel Po la velocità media m. 1,66, e la portata m. c. 5454,10. Sta dunque la piena del Reno a quella del Po all'incirca come 1:16,32 proporzione maggiore di quella 1:24,62 calcolata da Manfredi. E la portata del Po gonfio accresciuto dal Reno in piena sarà di m. c. 5788,38.

Ritrovata la portata del Po accresciuto dal Reno per trovare l' altezza y dell' acqua, bisogna risolvere l'equazione cubica (2).

$$0,00717\frac{Q^2}{2g} + 0,000024\,Qly = \frac{l^3 y^3 \cos.\phi}{1 + 2y}$$

dove abbiamo $Q = 5788,38$; $l = 288,37$; $\cos.\phi = 0,0000996$. Ridotta a numeri l' equazione diventa

$$y^3 - 0,0335\,y^2 - 15,047\,y - 1473,4 = 0$$

onde si trae $y = 11,83$. Adunque l' alzamento che riceverebbe il Po in piena per l' influenza della piena del Reno, calcolando dappresso i supposti adottati, riuscirebbe di metri 0,45 presso a poco.

---

(1) *Manfredi. Annotazioni al Guglielmini al Cap. X, ann.* 10.

(2) *Venturoli. Elementi di Meccanica ecc. Tom. II, art.* 329.

PROSPETTO

DELLE SPERIENZE IDROMETRICHE

Confrontate colla Formola di Eytelwein.

Osservatori	N.°	Sezione *Metri quadrati*	Peri-metro *Metri*	Raggio medio $= D$ *Metri*	Pen-denza $= \cos. \varphi$ *Dieci-milion.*[i]	Prodotto $D \cos. \varphi$ *Dieci-milion.*[i] *di metro*	Velo-cità osser-vata *Metri*	Velocità calcolata colla formola *Metri*	Divario *Vel. oss.* *Vel. calc.* / *Vel. oss.*
Du Buat	1	0,0505	0,68	0,074	1077	80	0,124	0,118	0,048
	2	0,1137	0,95	0,119	1077	128	0,154	0,157	— 0,018
	3	4,4872	8,77	0,512	362	185	0,197	0,194	0,011
	4	5,4037	9,12	0,592	362	214	0,211	0,211	0,000
	5	0,0153	0,37	0,041	5787	239	0,242	0,225	— 0,071
	6	0,0258	0,58	0,045	7082	316	0,249	0,263	0,056
	7	5,7568	9,20	0,625	458	286	0,260	0,249	0,042
	8	0,0252	0,46	0,055	5787	317	0,263	0,263	0,000
Woltmann	9	2,8092	5,19	0,541	666	361	0,281	0,282	— 0,006
	10	2,2260	4,81	0,462	858	397	0,281	0,298	— 0,060
Du Buat	11	0,0269	0,47	0,057	5787	328	0,310	0,268	0,135
Woltmann	12	0,5802	2,87	0,202	2187	443	0,320	0,316	0,011
Du Buat	13	0,0379	0,63	0,060	7082	427	0,327	0,310	0,052
	14	8,7216	9,91	0,880	868	764	0,329	0,425	— 0,292
	15	0,0308	0,51	0,061	5787	352	0,334	0,279	0,165
	16	0,0253	0,57	0,044	10764	473	0,367	0,329	0,103
	17	22,6410	15,38	1,472	303	446	0,368	0,318	0,136
	18	0,0558	0,71	0,079	7082	560	0,384	0,360	0,062
	19	0,0775	0,80	0,098	7082	695	0,421	0,404	0,040
	20	7,6740	9,74	0,787	651	513	0,426	0,343	0,194
Woltmann	21	0,9842	3,15	0,312	2083	650	0,430	0,390	0,040
Du Buat	22	29,0395	16,35	1,776	279	496	0,432	0,337	0,220
	23	11,9062	10,88	1,094	1121	1226	0,472	0,547	— 0,160
	24	0,0199	0,41	0,048	23419	1126	0,495	0,523	— 0,056
	25	0,0253	0,57	0,044	21834	959	0,548	0,480	0,124
	26	0,0288	0,49	0,059	23419	1376	0,549	0,581	— 0,057
	27	0,0369	0,55	0,067	23419	1569	0,606	0,623	— 0,029
Funk	28	0,0256	0,88	0,029	108342	3157	0,633	0,896	— 0,416
Du Buat	29	0,0413	0,58	0,070	23419	1664	0,637	0,642	— 0,008
	30	0,0611	0,70	0,087	24271	2108	0,735	0,727	0,018
	31	0,0138	0,35	0,039	47169	1841	0,745	0,677	0,091
	32	0,0723	0,76	0,095	23148	2190	0,766	0,741	0,033
	33	0,0632	0,74	0,086	21834	1870	0,766	0,683	0,108
Brünings	34	114,3242	91,00	1,256	2028	2548	0,771	0,802	— 0,041
Du Boat	35	0,0738	0,77	0,096	23148	2212	0,772	0,745	0,035
Funk	36	76.5115	111,71	0,685	4500	3083	0,772	0,885	— 0,147
Du Buat	37	0,0371	0,80	0,046	47169	2190	0,783	0,742	0,053
	38	0,0876	0,84	0,104	23148	2412	0,816	0,780	0,045
	39	0,0924	0,86	0,107	23148	2478	0,855	0,791	0,075

Osservatori	N.°	Sezione *Metri quadrati*	Perimetro *Metri*	Raggio medio $= D$ *Metri*	Pendenza $= \cos \phi$ *Diecimilion.*[i]	Prodotto $D \cos . \phi$ *Diecimilion.*[i] *dimetro*	Velocità osservata *Metri*	Velocità calcolata colla formola *Metri*	Divario *Vel. oss. Vel. calc. Vel. oss.*
Du Buat	40	28,4527	16,27	1,749	1559	2726	0,860	0,831	0,034
	41	0,0958	0,88	0,109	23148	2522	0,863	0,798	0,076
	42	0,0991	0,89	0,111	23148	2566	0,880	0,806	0,085
Brünings	43	205,7047	92,88	2,215	1492	3304	0,917	0,923	— 0,006
	44	1250,8700	329,80	3,793	1105	4191	0,918	1,038	— 0,130
	45	566,4021	181,06	3,128	1256	3929	0,938	1,004	— 0,071
Du Buat	46	23,0754	15,40	1,498	1653	2476	0,950	0,791	0,168
Brunings	47	435,1409	185,14	2,350	1717	4035	0.975	1,019	— 0,045
Funk	48	277,5881	126,12	2,201	1915	4215	1,011	1,036	— 0,024
	49	179,0192	130,54	1,371	5032	6901	1,035	1,341	— 0,295
Brünings	50	304,0761	108,89	2,792	1492	4166	1,039	1,034	0,004
Funk	51	304,3721	114,85	2,650	2494	6609	1,057	1,312	— 0,240
Brunings	52	1540,0777	514,32	2,994	1321	3956	1,092	1,007.	0,077
	53	447,2527	169,45	2,639	2201	5809	1,122	1,228	— 0,094
	54	1884,2322	369,03	5,106	1105	5642	1,210	1,210	0,000
	55	690,9670	186,71	3,701	1256	4648	1,218	1,095	0,101
	56	283,1025	99,16	2,855	2028	5790	1,225	1,225	0,000
Funk	57	221,2631	136,19	1,625	5032	8175	1,226	1,463	— 0,193
	58	336,6704	117,05	2,876	2494	7174	1,239	1,368	— 0,104
Brünings	59	473,6428	227,19	2,085	1717	3580	1,274	1,276	— 0,001
	60	1115,4731	313,49	3,558	1256	4469	1,293	1,047	0,191
	61	1243,6816	240,06	5,181	1256	6507	1,299	1,302	— 0,002
	62	2601,7860	524,05	4,965	1321	6559	1,304	1,306	— 0,002
Funk	63	364,3406	119,71	3,043	2494	7590	1,337	1,408	— 0,053
	64	730,1583	180,43	4,047	1915	7749	1,417	1,423	— 0,004
	65	388,5643	121,13	3,208	2494	8000	1,450	1,446	0,093
	66	491,4659	199,58	2,462	3076	7575	1,467	1,390	0,052
Brünings	67	708,0025	186,08	3,805	2201	8374	1,474	1,572	— 0,067
Funk	68	265,5747	141,84	1,872	5032	9422	1,490	1,481	0,007
	69	185,8137	116,42	1,596	4500	7182	1,502	1,369	0,089
	70	416,2345	122,05	3,412	2494	8508	1,506	1,493	0,009
	71	217,3735	105,53	2,060	5503	11335	1,509	1,728	— 0,145
	72	627,5521	201,74	3,111	3076	9568	1,575	1,585	— 0,006
	73	474,4307	128,88	3,681	2494	9181	1,597	1,552	0,028
	74	296.0022	145,60	2,033	5032	10230	1,600	1,640	— 0,025
	75	494,4794	130,07	3,802	2494	9481	1,608	1,578	0,019
	76	250,1641	110,61	2,262	5503	12445	1,626	1,812	— 0,114
	77	547,1510	141,68	3,862	2494	9631	1,663	1,590	0,044
	78	625,1297	145,10	4,308	2494	10745	1,735	1,681	0,031
	79	351,5394	151,88	2,315	5032	11647	1,757	1,752	0,003
	80	387.0873	155,96	2,482	5032	12489	1,820	1,815	0,002
	81	418,4993	159,41	2,625	5032	13210	1,869	1,868	0,000
	82	333,1748	122,38	2,722	5503	14980	1,919	1,951	— 0,017
	83	352,8688	124,36	2,837	5503	15613	1,993	2,034	— 0,020
	84	507,1228	159,10	3,187	5032	16040	2,008	2,062	— 0,026
	85	371,9229	125,58	2,962	5503	16297	2,035	2,078	— 0,021
	86	531,6419	170,39	3,120	5032	15700	2,040	2,039	0,000

Osservatori	N.°	Sezione *Metri quadrati*	Perimetro *Metri*	Raggio medio $= D$ *Metri*	Pendenza $= \cos.\varphi$ *Diecimilion.*[i]	Prodotto $D \cos.\varphi$ *Diecimilion.*[i] *di metro*	Velocità osservata *Metri*	Velocità calcolata colla formola *Metri*	Divario $\frac{\textit{Vel. oss.} - \textit{Vel. calc.}}{\textit{Vel. oss.}}$
Funk	87	578,6123	177,61	3,258	5032	16393	2,101	2,085	0,008
	88	616,3260	179,18	3,440	5032	27309	2,119	2,143	— 0,011
	89	477,0892	133,77	3,566	5503	19626	2,294	2,284	0,004
	90	592,3981	145,60	4,069	5503	22389	2,409	2,442	— 0,013
	91	544,7385	138,51	3,933	5503	21642	2,416	2,400	0,007
			Sperienze fatte in Italia						
Bidone	92	0,0152	0,42	0,036	194510	7066	1,366	1,358	0,008
	93	0,0222	0,46	0,048	194510	9343	1,586	1,566	0,013
	94	0,0276	0,49	0,056	194510	10849	1,692	1,690	0,001
Bonati	95	1617,4079	612,09	2,640	611	1613	0,687	0,632	0,080
	96	2299,6967	615,57	3,736	611	2283	0,736	0,758	— 0,030
	97	3734,5601	527,20	7,080	996	7052	1,269	1,356	— 0,068
Scuola degl'Ingegn.	98	1899,1400	407,00	4,666	996	4647	1,146	1,095	0,044
	99	218,7790	76,72	2,852	1306	3725	1,115	0,977	0,124

TAVOLA

Calcolata dappresso la formola di Eytelwein *per trovare la velocità media della corrente, data la sezione e la pendenza.*

Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$
Metri	*Diecimi-lionesimi di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesimi di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesini di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesimi di metro*
0,01	3	0,39	651	0,77	2354	1,15	5113
0,02	6	0,40	682	0,78	2413	1,16	5200
0;03	11	0,41	714	0,79	2473	1,17	5288
0,04	16	0,42	747	0,80	2534	1,18	5376
0,05	21	0,43	780	0,81	2595	1,19	5465
0,06	28	0,44	814	0,82	2657	1,20	5555
0,07	35	0,45	849	0,83	2720	1,21	5646
0,08	43	0,46	885	0,84	2783	1,22	5737
0,09	51	0,47	922	0,85	2847	1,23	5829
0,10	60	0,48	959	0,86	2912	1,24	5921
0,11	71	0,49	997	0,87	2978	1,25	6015
0,12	82	0,50	1035	0,88	3044	1,26	6109
0,13	93	0,51	1075	0,89	3111	1,27	6205
0,14	106	0,52	1115	0,90	3179	1,28	6300
0,15	119	0,53	1155	0,91	3248	1,29	6396
0,16	132	0,54	1197	0,92	3317	1,30	6493
0,17	147	0,55	1239	0,93	3387	1,31	6591
0,18	162	0,56	1282	0,94	3458	1,32	6690
0,19	178	0,57	1326	0,95	3530	1,33	6789
0,20	195	0,58	1370	0,96	3602	1,34	6889
0,21	212	0,59	1416	0,97	3675	1,35	6990
0,22	230	0,60	1461	0,98	3749	1,36	7091
0,23	249	0,61	1508	0,99	3823	1,37	7193
0,24	269	0,62	1556	1,00	3898	1,38	7296
0,25	289	0,63	1604	1,01	3974	1,39	7400
0,26	310	0,64	1653	1,02	4051	1,40	7504
0,27	332	0,65	1702	1,03	4128	1,41	7609
0,28	354	0,66	1753	1,04	4206	1,42	7715
0,29	378	0,67	1803	1,05	4286	1,43	7822
0,30	402	0,68	1855	1,06	4364	1,44	7929
0,31	426	0,69	1908	1,07	4445	1,45	8037
0,32	452	0,70	1961	1,08	4526	1,46	8146
0,33	478	0,71	2015	1,09	4607	1,47	8258
0,34	505	0,72	2070	1,10	4690	1,48	8366
0,35	533	0,73	2125	1,11	4773	1,49	8477
0,36	561	0,74	2181	1,12	4857	1,50	8589
0,37	590	0,75	2238	1,13	4942	1,51	8701
0,38	620	0,76	2296	1,14	5027	1,52	8814

Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$	Velocità media $= u$	Valore del prodotto $D \cos. \phi$
Metri	*Diecimi-lionesimi di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesimi di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesini di metro*	*Metri*	*Diecimi-lionesimi di metro*
1,53	8928	1,90	13657	2,27	19387	2,64	26118
1,54	9043	1,91	13798	2,28	19555	2,65	26313
1,55	9158	1,92	13941	2,29	19725	2,66	26509
1,56	9274	1,93	14084	2,30	19895	2,67	26707
1,57	9391	1,94	14228	2,31	20067	2,68	26905
1,58	9509	1,95	14373	2,32	20238	2,69	27104
1,59	9627	1,96	14519	2,33	20410	2,70	27303
1,60	9746	1,97	14664	2,34	20584	2,71	27504
1,61	9866	1,98	14811	2,35	20757	2,72	27704
1,62	9986	1,99	14959	2,36	20932	2,73	27906
1,63	10108	2,00	15107	2,37	21107	2,74	28108
1,64	10230	2,01	15257	2,38	21284	2,75	28311
1,65	10352	2,02	15405	2,39	21460	2,76	28515
1,66	10476	2,03	15556	2,40	21637	2,77	28720
1,67	10599	2,04	15707	2,41	21816	2,78	28925
1,68	10725	2,05	15859	2,42	21995	2,79	29131
1,69	10850	2,06	16012	2,43	22175	2,80	29338
1,70	10977	2,07	16165	2,44	22355	2,81	29545
1,71	11104	2,08	16320	2,45	22536	2,82	29754
1,72	11231	2,09	16474	2,46	22718	2,83	29963
1,73	11360	2,10	16630	2,47	22900	2,84	30172
1,74	11489	2,11	16786	2,48	23084	2,85	30383
1,75	11620	2,12	16943	2,49	23268	2,86	30594
1,76	11750	2,13	17101	2,50	23453	2,87	30806
1,77	11881	2,14	17257	2,51	23638	2,88	31018
1,78	12014	2,15	17419	2,52	23824	2,89	31232
1,79	12146	2,16	17579	2.53	24012	2,90	31446
1,80	12281	2,17	17740	2,54	24199	2,91	31661
1,81	12414	2,18	17901	2,55	24388	2,92	31876
1,82	12551	2,19	18063	2,56	24577	2,93	32092
1,83	12686	2,20	18226	2,57	24768	2,94	32309
1,84	12822	2,21	18389	2,58	24958	2,95	32527
1,85	12960	2,22	18554	2,59	25149	2,96	32745
1,86	13097	2,23	18719	2,60	25340	2,97	32965
1,87	13237	2,24	18885	2,61	25534	2,98	33185
1,88	13376	2,25	19052	2,62	25728	2,99	33405
1,89	13516	2,26	19218	2,63	25922	3,00	33627

APPLICAZIONI

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA

AD ALCUNI PUNTI

DELLA SCIENZA DELL'INGEGNERE

DI

CARLO SERENI

INGEGNERE E PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA
NELLA SCUOLA DEGL'INGEGNERI PONTIFICJ.

...... des recherches pareilles doivent être encouragées; elles ont le grand avantage d'éclairer la marche de la pratique, et montrant la perfection absolue comme une limite à la quelle il servit à desirer qu'on pût atteindre, elles servent du moins à prevenir des trop grands écarts.

Girard. V. Annales de Chimie, et de Phisique. Décembre 1817.

§ I.

PRELIMINARI.

1. Monge ha fatto vedere quanto le superficie di second'ordine sono proprie all'Architettura sia per l'eleganza delle loro forme, sia per la facilità colla quale possono essere materialmente costruite, e puossi aggiungere alle arti tutte, dappoichè Dupin ha dimostrato l'importante uffizio loro nella teoria generale delle superficie. Se non che per quasi fatalità; non ugualmente da tutti gl'individui di questa famiglia si è studiato di trar partito alle arti, in tempo che i nostri filosofi non sdegnando più discendere alle utili applicazioni si compiacciono di render meritevoli di stima e d'onore le sublimi loro meditazioni più pel bene ch'esse producono, che per l'originalità de' loro concetti. Bordoni stesso non fa parola nell'eccellente suo Trattato de' contorni delle ombre nè dell'iperboloide ad una falda nè della paraboloide iperbolica, comechè ampiamente abbia analizzato quest'accidente della luce per ogni altra superficie di secondo grado.

Eppure queste due superficie non sono in realtà nè più refrattarie alle forze dell' analisi e della geometria, come lo provano tante teorie, nè meno benemerite alle arti più interessanti il nostro viver socievole; che anzi potrebbesi andar tentati di attribnir loro tanta importanza nelle combinazioni che le sono proprie, quanta al piano stesso per l'analogia che v'ha tra le generazioni di queste superficie. Ma sia pur bando ad ogni parzialità, ed a nulla più aspirino queste due superficie che all' onore di aver comuni con ogni altra loro congenere le qualità richieste dalla Statica per ciò che ha riguardo alla solidità delle costruzioni, dai nostri bisogni per quanto importa il comodo, e finalmente da' nostri costumi per quanto spetta al decoro.

2. Si pongano ad equazione i momenti della spinta delle terre, e della resistenza de' rivestimenti a scarpa, cioè le due quantità

$$aG\left(\frac{b^2}{2}+bp+\frac{p^2}{3}\right)=\frac{a^3gM}{6}$$

tratte da' N. 582 e 591 della Meccanica Venturoli terza edizione, ove b rappresenta la grossezza del muro, a l'altezza delle terre da sostenersi non che del rivestimento, p la base della scarpa, g la gravità specifica delle terre, G quella della muratura, ed M una funzione del coefficiente d'attrito e dell'angolo che formano colla verticale le terre naturalmente smosse. Dopo poche operazioni di calcolo si perverrà al risultamento

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots p+\frac{3}{2}b=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2gM}{2G}+\frac{3}{4}b^2\right)}$$

Esso dimostra prima d'ogni altra cosa che le basi p delle scarpe non sono proporzionali alle altezze a, tranne il caso in cui fosse $b=0$, caso però che in pratica non si realizza quasi mai. Se dunque le terre da sostenersi col rivestimento non siano terminate nella loro parte sublime orizzontalmente, come indica in generale la Fig. 1 Tav. II, e come avviene infatti nelle ale de' ponti e delle chiaviche, nelle strade di montagna, spesse volte nelle opere di fortificazione, ed in tanti altri casi, la supreficie esterna della scarpa non può essere piana.

In secondo luogo si rileva che le dimensioni p di un rivestimento d'altezza variabile sono ordinate a delle parallele all'asse secondo d'iperbole descritte ne' piani verticali (P). La loro posizione relativa dipende poi dalla natura e dalla situazione della superficie sublime (σ), come per conseguenza la qualifica del luogo geometrico di tutte le loro estremità, cioè della linea d'intersezione fra la superficie esterna della scarpa col terreno orizzontale su cui poggia.

3. Per esaminare i casi più comuni e più importanti, ove la superficie (σ) è piana, se ne fissi la giacitura notando ϕ l'angolo $a\,\Gamma\,A$ di sua inclinazione coll' orizzonte. Riferiscansi poi le p, ossia le HH', BB' ecc. alla $\Gamma B'$, sostituendo nell'equazione (1) in luogo di a, q $tang.\ \phi$ fornito dall' analogia

$$1 : tang.\ \phi :: \Gamma H' = q : H'h = a$$

ed avrassi l'equazione del luogo geometrico degli esterni della p fra le coordinate rettangole p, q coll'origine in Γ

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots p+\frac{3}{2}b=\pm\sqrt{\left(q^2\frac{gM\,tang.^2\phi}{2G}+\frac{3}{4}b^2\right)}$$

Quest' equazione esprime una linea iperbolica coll' asse dell' ascisse parallelo al secondo della curva, di cui si determina il centro C supponendo $q=0$, onde

$$p=\frac{b}{2}(-3\pm\sqrt{3})$$

e dividendo per mezzo la differenza Vv delle due ordinate negative ΓV, Γv corrispondenti all'origine Γ. Facciasi $p=0$, e risulta $q=\pm\frac{b}{tang.\ \phi}\sqrt{\frac{3G}{gM}}$ che indica la curva incontrar l'asse delle ascisse ne' punti A, A' equidistanti dall'origine Γ.

Confrontando questi risultamenti della teoria delle curve alle condizioni meccaniche del problema si vede che il ramo $a\,v\,a'$ riesce inutile. Ne' punti A, A' la scarpa da aggiungere è nulla, come infatti dev' essere, dappoichè hassi una grossezza invariabile di muro $b = AD$ suscettiva di far equilibrio alla spinta delle terre d'altezza $a = \pm\, b\sqrt{\frac{3\,G}{g\,M}}$. Oltre questi due punti l'iperbola per indole sua si allontana sempre più dalla linea d'ascisse; e per verità il piano (σ) passando sotto l'orizzonte per Γ diventa limite di un escavo, e le terre da sostenersi acquistando corrispondentemente maggior altezza positiva o negativa, il rivestimento ha bisogno di scarpa sempre più robusta. Tra i punti A, A' le ordinate p son negative, nel qual intervallo l'altezza delle terre essendo minore di quella cui resiste la grossezza primitiva AD è ben naturale che fa bisogno sottrarre e non aggiungere nuova muratura per ottenere il richiesto equilibrio. Se non che corrispondentemente alle altezze negative, le ordinate dell'iperbola non ponno più essere dimensioni d'equilibrio, che richiede la base della scarpa nell'infima parte del rivestimento, e non alla sommità; per altro riprendono tale qualità trasportate che siano dal piano (1.°) al (σ) in ogni rispettivo profilo. Ma è da riflettere che questa traslazione non saprebbe giovare alla pratica che pel tratto infinito $A'B'$, avvegnacchè per tutto il tratto $A'VA$, quantunque soddisfatta la condizion d'equilibrio, il muro riuscirebbe più grosso in sommità che alla base. Siffatte anomalie non deggiono far meraviglia: l'algebra non soffre restrizioni per le condizioni fisiche cui può essere vincolato un problema, e fornisce indistintamente tutti i risultamenti che dipendono dalla legge di continuità, alcuni de' quali inutili o contradditorj per una data quistione, cangian d'aspetto per altre a circostanze diverse.

L'antecedente analisi dimostra che la superficie esterna di queste scarpe vuol essere generata da una retta che si muova parallelamente al piano (P) sulla retta $a\,b$ e sull'iperbola AHB, oppure dall'iperbola stessa che scorra le rette Aa, Bb parallelamente al piano (1.°), cangiando dimensioni ad ogni successiva posizione; ma le muraglie non possono costruirsi in tai modi, e il ripiego universalmente adottato di sostituire alla superficie d'equilibrio un piano è il pessimo de' ripieghi. Infatti nel cangiamento di superficie non essendo possibile conservare immutata la peculiare resistenza del muro, nè d'altronde essendo permesso d'impiccolirla, ben vuole ragione che l'industrioso costruttore profitti di questo indispensabile aumento per avvalorare possibilmente la resistenza del muro in proporzione della spinta delle terre. *D'après toutes les recherches, et les observations que j'ai fait à ce sujet, je pense que pour mettre les revêtements au-dessus de tous les efforts qu'ils peuvent avoir a soutenir, il faut que leur resistence soit double de la poussée* (*). Il piano per contrario rinforza più energicamente la resistenza dove si ha minima spinta, e lo appalesa la sua traccia $B\Gamma$ scostandosi sempre più da' profili (P), (p), (P'). Qualunque altro piano si volesse risguardar surrogabile alla superficie d'equilibrio, sebbene non contenesse che uno solo de' suoi elementi rettilinei, $b\,B$ ovvero $b\,a$; anderebbe soggetto agli stessi inconvenienti, tranne pel secondo caso quello di non soccorrere il profilo (P), che sopra tutti ne abbisogna.

Meglio è permutare la superficie d'equilibrio con quella generabile dalla corda AB scorrendo orizzontalmente le direttrici Aa, Bb, che non disagevola la costruzione del muro, ed invigorisce tanto più efficacemente la sua resistenza. Riesce indifferente pe' muratori tendere il filo regolatore de' strati fra due regoli verticali, o disugualmente inclinati, e riesce massimo l'aumento di forza in qualcuno de' profili intermedj a' due estremi $(P)\,(P')$ che non soffrono alterazione. Se finalmente riflettasi che non è possibile sostituire altra superficie generabile da

(*) *Rondelet. Art de bâtir, tome III, section III, article VI.*

una retta che si muova orizzontalmente, e che avvalori la resistenza rigorosamente in proporzione della spinta, forza sarà concludere che questo è il miglior ripiego adottabile, quantunque l'aumento di resistenza prodotto dal piano superi alcune volte in ogni profilo quella che si ottiene per mezzo della superficie, imperocchè ciò accade sempre impiegando un solido maggiore.

4. Se la scarpa fosse interna, il momento di resistenza cambia valore ma non forma, come è notato al N.° 584 della citata Meccanica, e parimenti muterebbe dimensioni non forma la superficie d'equilibrio.

5. Nè variano questi risultamenti ancorchè vogliasi porre a calcolo la coesione delle terre, come hanno fatto Coulomb e Prony. L'equazione N.° 610 dell'*Architecture hydraulique* di Prony

$$KS' = \frac{1}{b}(1 - f\,tang.\,\sigma)\pi h^3 - \frac{\frac{1}{2}\gamma\,sec.\,\sigma}{sen.\,\sigma} h^2$$

diventa secondo le denominazioni del Venturoli

$$aG\left(\frac{b^2}{2} + bp + \frac{p^2}{3}\right) = \frac{gMa^3}{6} - Na^2$$

ove M addita una funzione diversa dall'antecedente ma delle stesse quantità, ed N una funzione del coefficiente di coesione e dello stesso angolo sotto cui si dispongono naturalmente le terre smosse, e si rileva per la teoria delle curve ch'essa pure rappresenta un'iperbola come la (1). Dunque le conclusioni precedenti non ponno cangiare sostanzialmente per questo nuovo elemento introdotto nell'equazione d'equilibrio. Posteriormente l'Autore stesso nell'operetta *Recherches sur la poussée des terres* ha determinata la coesione assoluta delle terre, vale a dire γ, e l'equazione (14) del N.° 16 che determina l'equilibrio di rotazione è salita al terzo grado fra la base e l'altezza della scarpa del rivestimento. A tanto grado perverrà dunque la linea AVA', e non pertanto rimarranno applicabili le considerazioni tutte del N.° 3, che sono indipendenti dall'ordine di quella curva; anzi tutte le regole stabilite dall'Autore, inclusivamente alla sua formola grafica per determinare colla riga ed il compasso la forma e dimensioni de' muri di rivestimento, si adattano egregiamente, all'uopo presente, avvegnacchè si può valersi di essa per tracciare i due profili estremi (P), (P') che servono a figurare completamente tutto il rivestimento.

6. Due piani ortogonali l'uno all'altro che si tagliano nella XZ sono indicati nella Fig. 2. de' quali il (1.°) è orizzontale. Siano $AA' - aa'$ le projezioni dell'albero orizzontale che conduce in giro la ruota di un molino a vento, $M - mm'''$ le projezioni della retta che divide a mezzo una delle sue ale, che intendesi della forma prescritta dal signor Venturoli ai Numeri 762 e 763 dell'Idraulica, vale a dire generata da una retta che scorrendo sulla $M - mm'''$ parallelamente al piano (1.°) faccia sempre coll'asse $M\mu'$, ossia colla direzione del vento, quell'angolo K sotto cui riceve la massima impressione, e sia finalmente MB projezione orizzontale della generatrice in qualsivoglia posizione. Riferita questa retta alle coordinate $MC = y$, $CP' = z$ avrà l'equazione

$$z = y\,tang.\,k$$

ove se a luogo di $tang.\,k$ pongasi il suo valore tolto dal precitato N.° 763 nascerà l'equazione

$$z = y\left(\frac{3vx}{2aV} + V\left(\frac{9v^2x^2}{4a^2V^2} + 2\right)\right)$$

fra le coordinate x, y, z, che esprime la superficie dell'ala riferita a tre piani rettangolari aventi comune il punto $M - m$, e che riducesi alla più semplice forma

$$(3)\ldots\ldots\ldots z^2 - 2y^2 - \frac{3v}{aV}xyz = 0$$

Attribuiscasi all' ordinata y un valor particolare $MC = \lambda$ ed avrassi l' equazione

$$(4) \ldots\ldots\ldots z^2 - 2\lambda^2 - \frac{3\nu\lambda}{aV} xz = 0$$

che additerà la projezione uguale alla linea stessa d' intersezione fra il piano verticale dalla traccia CP e la superficie (3), e che la teoria delle curve dimostra facilmente essere un'iperbola avente il centro in m, riferita a due diametri conjugati uno de' quali è nella stessa XZ di cui se ne determina la lunghezza $dd' = 2\lambda\sqrt{2}$ ponendo $x = 0$.

Si vede dunque che fra le superficie generabili da una retta che scorra orizzontalmente $M - mm'''$ la più vantaggiosa per le ale de' molini a vento ha per seconda direttrice l' iperbola dop descritta nel piano dalla traccia CP. L' altro ramo $d'\lambda q$ colla stessa verticale $M - m\mu'$ serve alla generazione dell' ala inferiore posta alternamente alla superiore, cioè projettata in $\Gamma\Gamma\Omega\Omega' - \lambda\lambda'\omega\omega'$. Nè per verità difficile o soverchiamente incomoda puossi dire la costruzione di siffatte superficie qualora sian determinate completamente le direttrici, tuttavolta non può essere l' opera nè dell' artista nè del puro ingegnere pratico per le cognizioni che si richiedono nel maneggio e sviluppo delle formole. Toglie ogni difficoltà la pratica più comune di tutti que' paesi, ove per mancanza d' acque correnti sono generalmente usati i molini a vento. Quivi una lunga sperienza ha sanzionate delle regole per la situazione degli orli $MO - m o'$, $MO' - m''' o'$, i cui estremi uniti da una retta, serve essa in concorso della $M - m' m'''$ a dirigere la generazione dell' ala, e può vedersi in Hachette *Traité élémentaire des machines, chapitre I, § III* la descrizione de' molini a vento del Belgio e la costruzione delle loro ale. Senza nuocere alla semplicità del lavoro potrebbe essere avvicinato tanto più alla perfezione teorica fissando la posizione degli orli estremi per mezzo dell' equazione (4) coll' assegnare ad x i valori peculiari mm', mm'''; e potrebbe servire eziandio per determinarne la lunghezza, qualora si avessero da costruire ali allargate verso la sommità per vantaggiare l' effetto di queste macchine, giusta le sperienze di Smeaton.

7. Basta che la pianta quadrilatera di un edifizio sia irregolare, ciocchè accade sovente in ogni luogo, e soprattutto nelle popolose città, perchè la superficie del suo coperto non possa essere piana. La consuetudine di porre negli edifizj gronda e comignolo orizzontali è sì costante ed universale, che quasi potrebbe dirsi legge fondamentale dell' arte di fabbricare, nel qual caso nè concorrendo nè essendo parallele queste rette che devono trovarsi amendue nella superficie del tetto, fanno vedere chiaramente non poter essa riuscire piana. La forma e disposizione de' materiali che compongono i soppalchi de' tetti può risguardarsi come un sistema di linee rette che tutte debbon trovarsi nella superficie sublime dell' edifizio, di cui una parte va compresa fra gli orli ad, bc de' frontespizj (*Fig.* 3) come sono le travi principali, ed un'altra parte fra il comignolo e la gronda, come sono i travicelli su cui poggiano le tavolette, e per conseguenza saranno tutte costituite nella superficie che genera qualunque di loro scorrendo le direttrici ab, cd, oppure le da, bc, a condizione di occupare successivamente le posizioni di tutte le altre. Ed è manifesto che questa legge di traslazione corrisponde a quella di far muovere la generatrice parallelamente ad un piano, che sarà rettangolare con quelli cui son parallele le due direttrici, quando siano parallele fra loro le rette AD, BC.

8. Abbiasi per caso nell' angolo saliente di una strada la fabbrica disegnata nella Fig. 4, ed apparirà assai chiaro che la finestra X non saprebb' essere collocata di livello con le altre di quel piano, qualora il coperto $ABCD$ fosse configurato nella maniera più consueta, ed indicata dalla figura stessa. E qualche volta potrassi ovviare quest' inconveniente disponendo il tetto in superficie continua generabile da una retta che abbia per direttrici del suo moto parallelo ad un piano le AB, CD, oppure le AD, BC. Un piano parallelo alle direttrici,

e quello che regola il movimento della generatrice s'incontreranno a squadra, se la projezione icnografica del tetto $ABCD$ sia rettangolare.

Tanto in questo caso che nel precedente, siffatte costruzioni riportano eziandio sopra ogni altra il vantaggio d'impiegare la minor quantità possibile di materiale, perciocchè la superficie a cui si foggiano questi tetti gode proprietà d'essere minima fra tutte quelle che possono contenere un sistema di quattro rette.

9. Vedrà l'Idraulico spingere dalla ripa dentro l'alveo di un fiume un molo, un pennello, una costruzione qualunque; ed ognuno sa per lo meno che tutti gli ostacoli opposti alla corrente sono maggiormente in preda a' suoi attacchi verso il filone che vicino alle sponde. Di maggior gagliardìa vogliono esser dunque laddove sono più vivamente battuti, e comechè nota non sia la vera scala delle velocità dal filone alle sponde, non dovendo mai l'Architetto perdere di mira l'agevolezza delle costruzioni, gli fia lecito assumerla rettilinea, onde limitare in tal guisa la base AB' (*Fig.* 5) di un'opera idraulica qualsiasi tanto a seconda che a ritroso della corrente. E dappoichè siffatti lavori deggion sempre essere costruiti a scarpa o finiscano nella lor parte sublime a spigolo, o abbiano una qualche grossezza uniforme projettata in Aa' le superficie de' suoi fianchi saranno generabili da una retta che percorra orizzontalmente quelle che si projettano in A ed in Ba, come pure in A', ed in $B'a'$.

10. Altri ed altri casi, nè straordinarj nè di minor entità, si potrebbero annoverare, ne' quali l'Ingegnere può impiegar convenientemente la superficie che genera una retta scorrendone due altre parallelamente ad un piano; ma ciò sarebbe soverchio a dimostrare l'ufficio e l'importanza di essa superficie nelle arti, e d'altra parte sarebbe infinita l'enumerazione completa di tutte le sue occorrenze nel vasto dominio dell'Architettura. Sarà dunque utile applicazione di Geometria Descrittiva la ricerca delle proprietà di questa superficie che direttamente risguardano la scienza dell'Ingegnere, e che perciò vogliono essere immediatamente accessibili alla pratica. Riporterò nell'ultimo paragrafo con alcune note analitiche quelle proposizioni che trascendono le forze del metodo sintetico e descrittivo, dove incidentemente faccio qualche tentativo sopra la miglior fermezza d'un lavoro valevolissimo a difendere le arginature de' fiumi, ed usato con frequenza e successo nel Po. Nato sulle sponde di quel fiume regale io vorrei pure che la mia patria lo temesse meno, e vorrei potervi contribuire con degli sforzi pari al buon volere, dimostrando come l'opera dell'Ingegnere attivo possa ritrarre non dispregevole ajuto dalle meditazioni del Geometra.

§ II.

DELLA PARABOLOIDE EQUILATERA

Cubatura e Spianamento.

11. È noto che la superficie generata da una retta che si muova sopra due altre costantemente parallela ad un piano è una paraboloide iperbolica di cui son parimenti note le proprietà più generali (*). Le superficie di secondo grado riduconsi generalmente di rivoluzione quando si agguagliano due delle loro sezioni principali; ma non già la paraboloide iperbolica, ove le sezioni parallele al terzo piano principale della superficie risultano iperbole equilatere, e non

(*) *Hachette. Traité des surfaces du second degré.*

circoli, la qual modificazione corrisponde all'ortogonalità del piano regolatore con quei che son paralleli alle due direttrici. Per ciò ho creduto potersi distinguere colla caratteristica *equilatera* qnesta particolar paraboloide iperbolica a cui son pervenute le analisi del § I esclusivamente a' Numeri 3, 6, 9, e parzialmente nei due 7, 8, comprendendo per altro de' casi che interessar possono la pratica forse più d'ogni altro. A giusto titolo posson dunque dirigersi unicamente a questa superficie le presenti applicazioni, che tanto più disagevoli riuscirebbero alla pratica se volessero generalizzarsi a tutte le paraboloidi iperboliche.

E comechè in Geometria Descrittiva sia lecito ammettere certe proposizioni dimostrate dall'analisi, non fia superfluo premettere quelle di cui più spesso occorreranne l'uso, desumendole dalla generazione rettilinea della superficie, che in tal modo si adattano più chiaramente all'uopo di queste applicazioni. Abbiasi ricorso alla nota prima per dedurre semplicemente che la superficie generata da una retta, che ne scorra due altre parallelamente ad un piano rettangolare con quei che son paralleli alle direttrici è di second'ordine, rimettendone l'individuazione all'esame delle sezioni del piano.

Si consideri in primo luogo parallelo alle direttrici AM Bb (*Fig.* 7), e la similitudine de' triangoli ne' due piani (Π), (P) dà

$$CH = \frac{AC \cdot DB}{AD} \quad D'B' = \frac{bD' \cdot DB}{bD}$$

e quelli del piano (π) parallelo al (Π), che dirige la generatrice,

$$C'H' = \frac{A'C' \cdot D'B'}{A'D'} = \frac{AC \cdot DB \cdot bD'.}{AD \cdot bD}$$

Confrontando le due rette GH, $C'H'$ per mezzo delle loro espressioni sarà

$$CH : C'H' :: bD : bD' :: hC : hC'$$

onde i punti h, H', H della superficie sono costituiti in linea retta, e quindi tutta la sezione del piano (p), che per conseguenza può servire anch'essa alla generazione della superficie, scorrendo sulle direttrici AB, bM parallelamente al piano (P).

Figurisi poi il piano segar comunque la proposta superficie, ed i due piani (Π), (P) (*Fig.* 8 *Tav. III*) nelle rette $\Gamma\gamma$, $\Gamma\gamma'$. Si trovino le due generatrici Hh, Kk rispettivamente parallele alle rette $\Gamma\gamma$, $\Gamma\gamma'$, e per conseguenza al piano secante $\gamma\Gamma\gamma'$. Per trovare queste due generatrici s'immagini per AB passare un piano (ω) parallelo alla $\Gamma\gamma$ che incontrerà l'altra direttrice Mb in qualche punto h, da cui potrà sempre condursi nel piano (ω) una retta Hh parallela alla $\Gamma\gamma$, che sarà una generatrice della superficie, poichè incontra di necessità anche l'altra direttrice AB parallelamente al piano (P). Lo stesso ragionamento può ripetersi per la Kk da determinarsi parallela a $\Gamma\gamma'$. Ora la linea comune alla superficie ed al piano secante deve contenere i punti d'incontro della generatrice in tutte le sue posizioni col piano suddetto; dunque per qualunque piano secante la superficie v'hanno sempre due punti della linea d'intersezione posti a distanza infinita, cioè sulle generatrici parallele a quel piano, dal che ne segue la superficie non poter essere tagliata dal piano per una linea che rientri in se stessa. D'altronde essa è del secondo grado, e però le sezioni piane non ponno essere che rette, paraboliche, o iperboliche, e quindi la superficie è una paraboloide equilatera (*).

13. Determinare in quali posizioni del piano secante la linea è una parabola o un'iperbola.

(*) *Hachette. Traité des surfaces du second degré. N.° 121. Tanto la seconda dimostrazione di questo numero, che quella del numero seguente, sono ricavate da Hachette. Premier supplément de la Geométrie Descriptive.* § *IV.*

Le generatrici Hh, Kk parallele alle intersezioni $\Gamma\gamma$, $\Gamma\gamma'$ del piano secante, che nomino (Θ), coi due (P), (Π) contengono i punti della linea d'intersezione tra 'l piano e la superficie situati a distanza infinita, ed i piani tangenti della superficie in questi punti taglieranno il (Θ) secondo le tangenti della linea stessa, cioè secondo i suoi asintoti. Un piano qualunque (O) condotto per la generatrice Hh taglia un'altra generatrice qualunque Bb dell'istesso sistema in un punto K pel quale conducendo la generatrice Kk spettante alla seconda generazione si ha nel suo incontro Δ colla prima il punto di contatto tra il piano (O) e la paraboloide. Dunque se il piano (O) è parallelo al (P), sarà altresì parallelo a tutte le generatrici di questo sistema, e per conseguenza esso toccherà la paraboloide in un punto della Hh posto a distanza infinita, vale a dire l'intersezione del piano (O) collocato in tal guisa col piano (Θ) sarà l'asintoto della curva cagionata dalla sua sezione nella paraboloide.

Nell'istesso modo è facile a vedere che conducendo per la generatrice Kk un piano (ω) parallelo al (Π) segherà esso il suddetto piano (Θ) nell'altro asintoto della curva. Di maniera che, qualunque sia la posizione del piano (Θ), gli asintoti della linea di sua intersezione colla paraboloide esser deggiono sempre paralleli alle rette $\Gamma\gamma$, $\Gamma\gamma'$, perchè gli uni e le altre sono le sezioni del piano (Θ) coi due paralleli (ω) (Π), ovvero cogli altri (O) (P) ugualmente paralleli tra loro. Ma allorchè il piano (Θ) sarà parallelo alla retta BB' egli è evidente che le $\Gamma\gamma$, $\Gamma\gamma'$ diventano parallele fra loro e quindi anche gli asintoti; inoltre saranno essi a distanza infinita, perchè le generatrici Hh, Kk si allontanano esse pure indefinitamente (N.° 12), ed in conseguenza i piani (O) (ω) condotti per esse, paralleli a' due (P) (Π), non possono incontrare (Θ) che secondo delle rette situate all'infinito. E dalla teoria delle linee di secondo grado è noto che le tangenti della parabola a' punti infinitamente lontani sono parallele, e si scostano fra loro senza fine; dunque il piano (Θ) locato parallelo alla sezione BB de' due piani (P) (Π), che regolano le generazioni della superficie, sega la paraboloide secondo una linea che ha i suoi asintoti infinitamente lontani, cioè secondo una parabola. In qualunque altra posizione del piano (Θ) gli asintoti si scontrano a distanza finita, e però la sezione è iperbolica.

14. Non si darà forse mai caso che l'Ingegnere impieghi la superficie di cui si ragiona, senza che abbia bisogno di calcolare il volume ch'essa comprende con altre superficie, o il di lei spianamento, sia per conoscere il materiale occorrevole a' muri di rivestimento, a' tetti, ad ale di molini a vento ecc. sia per valutare qualche mano d'opera nelle costruzioni stesse, come intonachi, taglio di pietre ecc.

Per ciò che risguarda la cubatura giova innanzi tutto por mente alla qualità e positura delle altre superficie, che in concorso della paraboloide racchiudono il solido da calcolare; avvegnacchè ne' pennelli o ne' moli, ove la base e la sommità sono d'ordinario piani paralleli non tratterassi che di trovare un volume di forma simile a quella che rappresenta la Fig. 7. Può esso reputarsi generato dal triangolo ADB che si muova parallelo al piano (Π) variando acconciamente le sue dimensioni, e può anche evitarsi di porre a calcolo questa variabilità, considerando il doppio solido della Fig. 9 generato dal triangolo ADB, che si mantiene costante di grandezza in ogni posizione (Π'). Sarà dunque il volume disegnato nella Fig. 7.

$$\frac{AD \cdot DB \cdot AM}{4}$$

per cui può dedursi in via di corollario che il prisma, questo solido, e la piramide, a basi ed altezze uguali stanno fra di loro nella ragione $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

Ma cessa l'utilità di questo modo se l'estremo sublime del muro non sia orizzontale come la base, per le ale de' ponti, delle chiaviche, pe' rivestimenti delle strade di montagna, ecc. riesce più comodo applicare la formola generale delle cubature, come è praticato nella Nota II.

Nella Nota III si determina il volume e la massa di alcune costruzioni idrauliche, e si fanno delle ricerche sulla loro stabilità, dipendentemente dalla grandezza de' materiali che le compongono.

15. A spianare la paraboloide equilatera non può essere di alcun giovamento il teorema meccanico N.° 85 della Meccanica Venturoli « Se una retta si move nello spazio in guisa che » rimanga sempre perpendicolare alla linea descritta dal suo centro di gravità; la superficie » generata dal moto di questa retta è uguale alla retta medesima moltiplicata pel viaggio del » suo centro di gravità. » Esso non sussiste in tanta generalità, poichè nella dimostrazione l'elemento superficiale compreso tra due posizioni successive della retta generatrice è ammesso come piano. Dunque immaginando estendersi indefinitamente codesto piano dovrebbe riuscir tangente della superficie in tutta la lunghezza della generatrice, altrimenti se per essa è secante, non essendo il più prossimo a tutto quell' elemento superficiale, non è neppure lecito usurparlo in sua vece. Non può essere innocuo il cangiamento di superficie, se non quando reciprocamente una è limite all' altra nella porzione che viene scambiata, come si fa nelle superficie di rivoluzione, ove qualunque zona elementare viene risguardata legittimamente conica, perchè appunto il cono tocca queste superficie secondo qualunque de' loro circoli paralleli. Ma il piano non è suscettivo di toccare la paraboloide iperbolica secondo le sue generatrici, come d'altronde è noto, e come può facilmente essere confermato intendendo trasferirsi una di queste rette nella posizione infinitamente prossima tanto sul piano che sulla paraboloide. Anco queste nuove generatrici per condizione essenziale del contatto dovrebbero accomunarsi, mentrecchè quella della paraboloide non può nè incontrare nè esser parallela alla rispettiva antecedente, e quella del piano soddisfa necessariamente all' una o all' altra di queste due condizioni. Si vede dunque che una retta può muoversi nello spazio ad infinite maniere, senza eludere l' unica condizione del teorema, e senza che se ne verifichi l' asserzione: quand' essa nè incontra, nè è parallela all' antecedente. In questi casi è forza ricorrere alla formola più generale degli spianamenti che per essere l' espressione di un elemento del piano infinitesimo in ogni dimensione, è suscettiva di rappresentare un elemento analogo di tutte le superficie, niuna essendovene a cui il piano non possa essere tangente in ogni punto.

Nella Nota IV è sviluppato il caso della paraboloide di cui si tratta.

Movimento de' gravi sulla superficie.

16. Determinare la linea che percorre un grave sulla paraboloide equilatera.

Limitando il problema a que' soli casi che possono interessare queste applicazioni, suppongasi in primo luogo il piano (1.°) orizzontale, e si destini qualunque punto Δ (*Fig.* 13). Per esso sian tirate le due generatrici $\Gamma\,\Gamma'$, $G\,G'$, che determinano, come e noto, il piano tangente della superficie in quell' istesso punto. Ora nel movimento iniziale Δ percorre uno spazietto elementare sulla superficie che è comune anche al piano tangente, e però considerandolo piuttosto in questa superficie che nella paraboloide si conosce la di lui forma e posizione: retta e perpendicolare alla generatrice $\Gamma\,\Gamma'$, perchè essa è intersezione del piano tangente col (x) che è orizzontale. Sia dunque rappresentato in $\Delta\,\Delta'$ il viaggio infinitesimo del punto Δ, che avrà la sua projezione $D\,D'$ normale a quella $A\,D$ della generatrice $\Gamma\,\Delta$. Supponendo ritrovato come antecedentemente il piano tangente in Δ' varrà pel secondo elemento $\Delta'\,\Delta''$ lo stesso ragionamento che si è fatto pel primo, e quindi esso avrà la sua projezione $D'\,D''$ normale ad $A\,D'$, che è projezione della generatrice parallela al piano (1.°) che passa per Δ'. Proseguendo nell' egual modo per tutti i successivi punti Δ''', Δ''''........ si appalesa facil-

mente la projezione $D\,D'\,D''\,D'''$ ...... risultare un poligono d'infiniti lati, ciascun de' quali essendo infinitesimo, riesce ortogonale non solamente ad una delle rette $A\,D$, ma ben anche all'infinitamente prossima $A\,D'$. Dunque la projezione della linea che scorre il punto Δ è costantemente perpendicolare ad un sistema di linee rette concorrenti ad un punto A; proprietà ben nota del circolo, e per conseguenza la linea suddetta viene determinata dall'intersezione della paraboloide con una superficie cilindrica retta, che ha per base il circolo dal centro A, e dal raggio $A\,D$. Esso centro è projezione sul piano (1.°) della linea di minima distanza fra tutte le generatrici parallele al detto piano (1.°), o come la nomina Hachette della *linea di stringimento*, ed il raggio è projezione della generatrice intercetta fra la linea di stringimento, e qualunque posizione del punto mobile.

Tutto ciò avviene ugualmente se la superficie sia passata in modo che riesca orizzontale il piano (P), nè è violata questa legge se non quando il mobile punto esista nell'una o nell'altra retta di stringimento, che viene allora da esso esattamente calcata.

17. Giaccia per seconda ipotesi orizzontale il piano (II.°), e rappresenti il quadrilatero rettangolo $AMbH$ della fig. 14 quello cognomine della fig. 13. La retta ΓG è manifestamente comune al piano tangente in Δ ed al (II.°), cosicchè condottavi normale dn avrassi nell'infinitesima dd' la projezione del primo spazietto elementare che percorre il punto Δ, per M sian descritte due rette MX', MZ' a squadra, una delle quali divida per mezzo l'angolo AMb, e sia prodotto sino ad esse la dn, che le incontra ne' punti E, e. Parimenti sian prolungate le $d\Gamma, dG$ ad incontrare rispettivamente in γ, g la MX', e finalmente da E sia tirata EK parallela ad MG, e dO perpendicolare ad MX'. Questa costruzione mostra con bastante chiarezza la somiglianza de' triangoli $Gd\Gamma, EKd$ che danno

$$dK:KE::\Gamma d:dG::d\Gamma:\Gamma M$$

ovvero sostituendo alle $M\Gamma, EK$ le loro eguali $\Gamma\gamma, Kg$, e componendo

$$dg:Kg::d\gamma:\Gamma\gamma$$

ove agguagliandosi gli antecedenti saranno parimenti uguali le $Kg, \Gamma\gamma$, e per conseguenza le $gE, M\gamma$. La retta dO, che divide per mezzo la base γg del triangolo isoscele γdg, taglia dunque in egual modo eziandio la retta ME, da cui ne consegue essere d il punto di mezzo della retta Ee.

E pertanto la tangente in qualsivoglia punto d alla projezione della linea che scorre Δ sulla paraboloide è tale, che le porzioni di essa intercette fra la curva e le due rette MX', MZ' si agguagliano tra di loro; proprietà caratteristica dell'iperbola che abbia quelle due rette per asintoti, di maniera che la linea richiesta viene somministrata in questo secondo caso dalla sezione di una superficie cilindrica retta, che abbia per base l'iperbola degli asintoti predetti, e che passi per d.

Godono eccezione que' soli punti della superficie che si projettano nella retta MZ', avvegnachè in qualsivoglia punto di essa suppongasi traslocato d, il rettangolo $M\Gamma d\,G$ diventa equilatero, e le diagonali $\Gamma\,G, d\,M$ rettangolari fra loro, in guisa che la projezione del viaggio di Δ accadde nella stessa diagonale Md, e viene per conseguenza determinato dalla sezione del piano verticale condotto per la stessa Md colla paraboloide.

Considerando l'intera superficie di cui sono piani principali il (II.°) e que' due che vengono rappresentati dalle traccie MX', MZ', scorgesi che in generale qualsivoglia punto animato dalla gravità percorre sovr'essa una linea la cui projezione sul piano (II.°) è un'iperbola, che ha per asintoti le traccie degli altri due piani principali della paraboloide, e se mettasi il punto in alcuno de' suddetti piani principali scorre la sezione da esso prodotta nella superficie. Ma poichè queste sezioni principali son due parabole che hanno il vertice in M a contatto col

piano (II.°), e situate contrariamente, per modo cioè che quella projettata in MZ' è superiore al detto piano (II.°) e l'altra inferiore, è da riflettere che se il punto mobile assumasi nella inferiore prosseguirà indefinitamente la sua marcia sopra questa curva; ma se al contrario pongasi in quella rappresentata da MZ', giunto ch'ei fosse in M dovrebbe equilibrarsi, quivi essendo orizzontale il piano tangente, e se prosseguirà in virtù del moto preconcepito salirà l'altro ramo della parabola, generandosi un moto oscillatorio che finalmente lascerà il mobile punto equilibrato in M, come se ivi fosse stato considerato dapprima.

18. Nell'una o nell'altra posizione trovasi appunto questa superficie tutte le volte ch'essa forma la cuopritura delle fabbriche rappresentate nelle fig. 3 e 4. Dalla qual circostanza si rileva che le acque piovane scoleranno per questi tetti secondo delle linee della natura prestabilita Numeri 16 e 17, qualora la superficie esterna sia continua e bastantemente levigata da render trascurabile l'influenza dell'attrito, come per esempio, nel caso di una cuopritura metallica o di pietre naturali.

Ma se il tetto abbia da esser ricoperto di tegole, come più d'ordinario è costume, ognuno ben sente che la pratica di fare in ogni caso i canaletti $ad, a'd', a''d''$ ecc. (*Fig.* 15.) paralleli alla generatrice, non è la più consentanea alle leggi della natura, e quindi ne viene il doppio inconveniente che le acque non scolano colla celerità necessaria a sgombrare prontamente il tetto, se essa venga determinata esattamente (come per noi devesi ammettere) dal rapporto che passa fra le dimensioni Aa, Ad; e che durante lo scolo i canaletti soffrono una pressione laterale, poichè tutta quella porzione di peso che risulta parallela alla superficie del coperto non impiegasi a velocitare l'acqua scorrente pe' canaletti stessi. Alzando tutto il comignolo cd si accresce naturalmente la celerità dello scolo, ma non si esonerano i canaletti dalla spinta laterale, che alcune volte potrebbe giunger a scomporre i coperti, massimamente dove si costuma di porre in opera le tegole senza cemento.

All'uno ed all'altro può facilmente ripararsi producendo la linea di gronda ab, e la projezione AC del comignolo fino al loro concorso K. Quivi fatto centro si descrivano delle circonferenze $c'b', c''b'' \ldots\ldots\ldots c^{(n)}b^{(n)}$ nel piano orizzontale CKb, e sopra ciascuna si faccia scorrere la generatrice verticale $C^{(n)}c^{(n)}$ di una superficie cilindrica che determinerà la traccia $c^{(n)}b^{(n)}$ de' canaletti, ossia la linea su cui son disposte le tegole, affinchè la velocità della discesa riesca massima.

Per ottenere che le acque piovane scorrano le linee di maggior pendio anche sul tetto della fig. 4 si traccieranno nel piano orizzontale delle gronde AM, Mb (*Fig.* 16) la retta Mf che divide a mezzo l'angolo retto AMb, ed i due sistemi d'iperbole $no, n'o', n''o'' \ldots\ldots pr, p'r', p''r'' \ldots\ldots$ aventi rispettivamente i loro vertici sulle MA, Mb, e l'asintoto comune Mf. Queste linee s'intendano percorse dalle rispettive verticali $o\Omega$, $f\Phi$, $p\Pi$ ecc. che segheranno la superficie del coperto $ABbM$ nelle corrispondenti traccie ΦM, $\Pi r \ldots\ldots$ de' canaletti.

Nè temasi soverchiamente prolissa e malagevole la descrizione di queste curve, avvegnachè in pratica basterà delinearne una sola $c^{(n)}b^{(n)}$ (*Fig.* 15), ovvero Πr (*Fig.* 16) su cui disposta una serie di tegole, tutte le altre emergeranno spontaneamente collocando le tegole aderenti a' filari che van preesistendo, come appunto si pratica nel costruire i tetti piani. Nè finalmente si obbietti difficoltà per adattare le tegole sopra traccie curvilinee, mentrecchè esse avran d'ordinario picciolissima curvatura, e, che più è, quasi tutti i filari delle tegole anche su coperti piani si vedono irregolarmente curvi.

Costruzione delle volte che hanno per intradosso la nostra superficie

19. Tutte le normali della paraboloide equilatera che passano per una generatrice sono costituite in un'altra paraboloide simile.

Infatti tutte le generatrici $KG, K'G'$ .... sono perpendicolari alla Mb, (*Fig.* 17) e però se ruotino intorno ad essa per un quarto di rivoluzione diverranno rispettivamente perpendicolari a' piani tangenti, $KGb, K'G'b$ ...., senza che si perturbi la loro disposizione relativa; dunque le normali della superficie che passano per la generatrice Mb sono costituite in un'altra paraboloide uguale. La qual generazione si accomuna eziandio alle superficie delle normali condotte per qualunque altra generatrice $E'F'$, immaginando in ciascun piano tangente $K\Gamma F, K'\Gamma' F'$ .... tirata pel punto di contatto una perpendicolare alla stessa $E'F'$, e facendo descrivere intorno ad essa un quarto di rivoluzione al sistema di queste perpendicolari, per cui si conclude tutte le rispettive superficie delle normali che incontrano le generatrici essere paraboloidi equilatere, e quindi simili.

È necessario rimarcare che la retta in cui ogni superficie normale taglia la preposta paraboloide appartiene alle rispettive loro sezioni principali, come pure che i loro vertici sono costituiti nell' una o nell'altra generatrice principale MA, Mb. Vedi la Nota 5.

20. Pertanto se invece di costruire i tetti delle figure 3 e 4 sopra un'armatura di legname, come è supposto a' numeri 7, 8, diasi occasione all' Ingegnere di comporli con una volta, il migliore scompartimento de' cunei verrà apprestato dalle generatrici della paraboloide equilatera ivi adoperata, come indica la citata fig. 17. Tutti i cunei saran diseguali fra loro, tranne quelli che riescono simmetrici rispetto alle rette principali MA, Mb, (Vedi la Nota 4.) ed ognuno di loro verrà figurato da cinque superficie simili all'interna della volta, la sesta, quella cioè che fa parte dell'estradosso, potendo essere di qualunque altra sorta.

Quantunque le superficie che dividono i cunei non siano normali fra di loro, come prescrivono le regole concernenti questa parte dell' Architettura, non ne può derivare pregiudizio rimarchevole alla stabilità e durata dell' edifizio, perciocchè sono perpendicolari all' intradosso della volta, e la loro inclinazione scambievole nelle consuete proporzioni de' coperti non può scostarsi lunga pezza dall'ortogonalità. Malgrado questo piccolissimo inconveniente merita preferenza siffatta divisione sopra quella che verrebbe tracciata per le linee di curvatura della superficie, e per la maggiore facilità che si ottiene nella costruzione de' cunei, che altrimenti avrebbero letti e fianchi figurati da superficie svilluppabili, di più lunga e penosa costruzione quando non sono cilindriche o coniche; e perchè questo scomparto facilissimo ad eseguirsi, non è meno elegante dell'altro, ove le linee di curvatura non presentano alcuno di que' punti singolari (*ombilics*) intorno a cui tutte si ravvolgono sì opportunamente per la decorazione, come nelle superficie che son curve in un senso solo; e finalmente perchè il precetto di Monge, che la divisione de'cunei debba annunziare il carattere della superficie cui appartiene l'intradosso di una volta, resta meglio soddisfatto: in fatti l' inclinazione scambievole delle linee di curvatura essendo costante per tutte le superficie, non può avere relazione veruna colla loro curvatura, e per contrario il rapporto de' due raggi di curvatura in ciascun punto della paraboloide è una funzione unicamente dipendente dell'angolo delle generatrici rettilinee che passano per quel punto.

21. Posata la pietra (5) (*Fig.* 19 *Tav. IV*) da cui deve tagliarsi un cuneo qualunque $\Gamma'\Gamma''\Delta'\Delta''$ sopra de' sostegni, che la sollevino alquanto da terra, si fissino a faccie opposte due regoli verticali $O\omega, P\pi$, e si noti opportunamente il punto Φ (*Fig.* 17) per rappresentare O della

fig. 19. Alle stesse faccie siano adattati altri dne regoli Oo, Pp inclinati rispetto a' precedenti per mezzo delle analogie

$$bH : HB :: O\omega \frac{HB \cdot O\omega}{bH}$$

$$AH : \frac{HB \cdot O\omega}{bH} :: M\Theta : \frac{MB \cdot O\omega \cdot M\Theta}{bH \cdot AH} = o\omega$$

$$AH : \frac{HB \cdot O\omega}{bH} :: M\Theta + OP : \frac{HB \cdot O\omega (M\Theta + OP)}{bH \cdot AH} = p\pi$$

e per modo che i piani $o\omega O$, $p\pi P$ siano perpendicolari ad OP, che è un regolo orizzontale.

Se il cnneo che si vuol costruire avesse tal distanza dalle generatrici principali MA, Mb, che riuscisse incomodo porre il regolo PO corrispondente all'una o all'altra, converrà trasferire Θ in altra posizione più acconcia del piano $AMHb$, e determinare i due punti o', p', come si è fatto p ed o.

Con questa semplicissima preparazione potrà l'artista scnoprire la faccia $OopP$ spettante alla superficie interna della volta, lavorando in guisa che il regolo PO scorra i due Oo, Pp, nella sua posizione orizzontale radendo costantemente il sasso.

Ridotta in tal modo la pietra si notino su' regoli OP, Oo (*Fig.* 20) i punti G', G'', γ, δ, che corrispondono a' cognomi della fig. 17, e tracciando per essi le generatrici $\gamma\gamma', \delta\delta', G'K', G''K''$ resteranno disegnati gli spigoli interni $\Delta'\Delta'', \Delta''\Gamma'', \Gamma''\Gamma', \Gamma'\Delta'$ del cuneo. Questa operazione si fa misurando $Og = Pg' = ME'$, $Od = Pd' = ME$, e conducendo $g\gamma, d\delta, g'\gamma'$, $d'\delta'$, ortogonali colle $O\omega, P\pi$, che segnano ordinatamente due punti di cadauna generatrice orizzontale, e così dicasi per descrivere le altre due $G'K', G''K''$, adattato che sia un altro regolo orizzontale op per dissotto. Diasi ora alla pietra tale giacitura che una generatrice $G''K''$ pervenga verticale, e siano applicati a' punti G'', K'' de' regoli $G''L'', K''l$ rispettivamente perpendicolari a' piani $PG''K'', G''K''p$. Da qualunque punto L si lasci cadere un filo a piombo, e pel suo piede λ sia tracciata sul terreno la retta $\lambda l'$ per modo che il piano $l'\lambda L$ riesce perpendicolare al regolo $G''L$, la qual cosa può eseguirsi facilmente descrivendo la projezione icnografica del regolo $G''L$, e ponendovi a squadra $\lambda l'$. Ad L si poggi altro regolo che scorra con un estremo la traccia $\lambda l'$ finchè incontra il regolo $K''l$ nella qual situazione venga fissato.

Per tal guisa restano determinate due direttrici $G''K'', Ll$ della paraboloide normale che figurar deve un fianco del cuneo, e sopra di loro la generatrice $G''L$ ha da scorrere costantemente orizzontale. Lavorando dunque come precedentemente si foggierà un'altra faccia del cuneo, e ripetendo la stessa costruzione per ogni altro spigolo interno, potrannd costruirsi, sempre nell'ugual modo, tutti quattro i fianchi del cuneo.

22. Se l'inclinazione scambievole delle direttrici non sia grande, potrà il cnneo venir tagliato dalla pietra anche per mezzo della sega; e se la superficie esterna della volta fosse parallela all'interna, come spesso addiviene, è ben naturale che pur anche la sesta faccia del cuneo sarebbe paraboloidica, e quindi per lavorarla non sarebbe mestieri che ripetere la costruzione della fig. 19 con altro sistema di regoli uguale a quello che ha servito per l'intradosso, e che ne distasse quant'esser deve grossa la volta.

Contorni delle ombre.

23. Di che natura è il contorno dell'ombra propria nella paraboloide iperbolica?

Adattate a' piani coordinati (I.°) e (III.°), che si tagliano in MY (*Fig.* 21) le parabole principali SMS', $\Sigma M\Sigma'$, e nel (II.°) che sega il (I.°) in XZ ed il (III.°) in MV la terza sezion principale $aa'\ bb'$ della proposta superficie, è facile a riconoscere per la sua nota generazione che tutti i piani perpendicolari al (II.°) corrispondono a quelli che producono sezioni paraboliche o rettilinee (Numeri 12 e 13).

Si tirino due corde DE, $D'E'$ parallele a' raggi del sole projettati sul piano (I.°), e per esse intendendo passare de' piani ortogonali al (I.°), segheranno la superficie in due iperbole aventi per asse primo rispettivamente le DE, $D'E'$, e che vengono rappresentate nelle $E\Omega D\Pi$, $E'\Omega' D'P'$. Tangenti ad esse sian condotte delle rette inclinate agli assi delle curve quanto la luce al piano (I.°), e da' rispettivi punti di contatto le ordinate ΩO, $P\Pi$, $\Omega' O'$, $P'\Pi'$, che segnano i quattro punti O, O', P, P' spettanti alla projezione del contorno, come è chiaro immaginando disporsi rettangolari al piano (I.°) que' delle due iperbole con un quarto di rivoluzione intorno a' rispettivi loro assi reali.

Le sezioni parallele della superficie essendo simili, e similmente poste le ordinate $O\Omega$, $O'\Omega'$ si ha la proporzione

$$CE:CO::C'E':C'O'$$

che denota il luogo geometrico di tutti i punti determinati come questi quattro congenere alla parabola SMS', avendo con essa comune il diametro TC e la tangente TL parallela alle DE, $D'E'$.

Questo ragionamento sussiste finchè la luce incontra il piano (I.°) con inclinazione maggiore che quella degli asintoti delle iperbole, che tutti son paralleli alle due generatrici della superficie projettata in TL. E queste generatrici avendo le corrispondenti loro projezioni ll' $\gamma\gamma'$ sul piano (II.°) ordinatamente parallele alle aa', bb' N.° 12, ne viene che il limite predetto può essere additato dall'angolo aMb. Passando poi la projezione della luce dentro l'angolo $a'Mb$ conviene applicare la stessa costruzione alla parabola $\Sigma M\Sigma'$, ed il risultamento è perfettamente uguale. Di maniera che può concludersi generalmente essere di forma parabolica il contorno dell'ombra aderente qualunque sia la direzione della luce, anche se DE riuscisse normale ad XZ. Anzi risulta in tale caso uguale all'una o all'altra parabola principale, perciocchè i piani verticali condotti per DE, $D'E'$ (*Fig.* 22) segano la superficie in tante parabole uguali, ed uguali per conseguenza vengono ad essere le DP, $D'P'$, ascisse corrispondenti a' contatti di rette parallele.

Nè si ha eccezione che pel caso in cui la luce avesse projezione sul piano (II.°) parallela ad alcuna delle due $aa'\ bb'$ (*Fig.* 21). Allora i punti O, O', P, P' si trasportano a distanza infinita e le tangenti ΩH, ΠK coincidono, di modo che il cilindro luminoso si converte in un piano che sega la paraboloide nella retta $TL-ll'$, supponendo questa la direzione della luce. Sian dunque noti gli effetti dell'illuminazione, che 'l parallelismo de' raggi proveniente dalla distanza del sole, rende indipendenti dalla forma e grandezza di quest'astro, e però supposta la sorgente lumifera in qualsivoglia punto della superficie, il piano ivi tangente, contiene tutti i raggi di luce che toccano la seperficie stessa, e le sue intersezioni separano in essa le parti illuminate dalle oscure: se fosse per esempio $T-t$ il punto lucido apparirebbero illuminati i due triangoli $lt\lambda$, $l't\lambda'$, in ombra per contrario i due $lt\lambda'$, $\lambda tl'$, e scostandosi infinitamente sulla $TL-ll'$ è naturale che ugualmente si allontana la $TL-\lambda\lambda'$, cioè

scomparisce, e non rimane altro limite all' ombra che $TL - lt$. Tutto ciò è ben evidente per le proprietà geometriche della superficie.

24. Collocata la paraboloide iperbolica come nel numero precedente, scuoprire di che natura sia il contorno dell' ombra portata in sè stessa dalle varie sezioni piane della superficie.

Prendendo ad esaminare in primo luogo la sezion principale rettilinea $a\,a'\,b\,b'$ (*Fig.* 23 *Tav. V*), e supponendo tolta la semisuperficie anteriore al piano (II.°), di modo che tutta la residua sia projettata ne' due triangoli $b\,M\,a'$, $a\,M\,b'$ si conduca la retta $M\,h$ parallela ai raggi luminosi projettati su quest' istesso piano. Intendendo fatte delle sezioni nella superficie normali al piano (II.°) e parallele alla $M\,h$, saranno paraboliche e concave allo spettatore, supposto anteriore al detto piano (II.°); dunque in tale posizione della luce non potrassi avere che ombra portata. Ed essendo la superficie del secondo grado, le di lei sezioni piane devono esser tutte segabili da una retta in due punti, quindi i raggi lucidi che radono l' uno e l' altro orlo $a\,a'$, $b\,b'$, avendo per luogo geometrico il piano, dovrà esso necessariamente incontrare la paraboloide secondo un' altra linea retta, che costituisce il contorno dell' ombra portata dalla prima.

Se la projezione della luce sul piano (II.°) sia parallela ad una delle due $a\,a'$, $b\,b'$, o se passa dentro l' angolo a $M\,b'$, cosicchè le sezioni normali parallele ad essa riescano convesse allo spettatore, ricadono entrambi questi casi sotto il dominio del problema antecedente.

Le alternazioni che subisce il confine dell' ombra nella superficie posteriore al piano (II.°), variando l'inclinazione di $M\,h$, si accomunano eziandio all'anteriore projettata ne' due triangoli $a\,M\,b$, $a'\,M\,b'$, se per contrario sussista essa parzialmente. L'esistenza dell'ombra portata dipende poi naturalmente dalla direzione della luce rispetto al piano (II.°), di maniera che fra lo zero e novanta gradi, considerati anteriormente al piano (II.°), avrassi ombra nel primo caso, e fra lo zero ed i novanta gradi posteriori, l' ombra è riserbata pel caso secondo.

Abbiasi in secondo luogo esposta a' raggi del sole qualsivoglia sezione parallela a quella di cui si è parlato finora, ossia un' iperbola uguale alla sua projezione $d\,s\,c\,g\,s'\,f$. Il contorno dell' ombra sarà dell' istessa natura, avvegnacchè i raggi radenti l' iperbola asseguata sono costituiti in una superficie cilindrica di cui essa è base, e l' altra linea d' intersezione di questo cilindro colla paraboloide; la quale motiva il contorno dell' ombra in quistione, dovendo essere piana per natura delle superficie di secondo grado, sarà essa pure iperbolica. Il piano, generalmente parlando, taglia tutte le generatrici de' cilindri, e quindi produce sezioni congeneri.

Ciò accade ugualmente e corrispondentemente a quelle stesse circostanze, che inducono cangiamento d' illuminazione nel caso precedente.

Se rimanga in preda alla luce alcuna delle due sezioni principali paraboliche, non è difficile applicare il ragionamento antecedente per conchiudere che il cilindro luminoso dalla base $S\,M\,S'$ (*Fig.* 24) sega la proposta superficie secondo un'altra parabola, intendendo rimossa l' emisuperficie superiore al piano (I.°). Si guidi $D\,E'$ parallela a' raggi luminosi projettati sul piano (I.°), e rappresenti $E\,\Gamma\,E'\,\Gamma'$ l' iperbola che nasce segando la superficie con un piano condotto per $D\,E'$ ortogonale al (I.°). Si inscriva la corda $E\,\Gamma$ inclinata ad $E\,D$ come la luce al piano (I.°), ed avrassi ombra portata finchè l'inclinazione predetta superi quella degli asintoti della curva. Uguale o minore ch' essa sia, scompare l' ombra portata, imperocchè le corde $E\,\Gamma\,E'\,\Gamma'$ non incontrano più i rispettivi rami dell' iperbola, per dar luogo all' ombra aderente di cui ne potrà essere segnata la projezione del contorno col numero precedente.

Tra questi limiti però la luce essendo parallela all' asse secondo dell' iperbola non projettasi alcun' ombra, e tale posizione è un altro limite intermedio che combinato a ciascuno degli estremi distingue i casi ne' quali hassi ombra nell' uno o nell' altro ramo della curva. Ri-

flettendo che qualunque sia il sistema di sezioni iperboliche parallele a' raggi della luce, i loro asintoti si projettano sul piano (II.°) ordinatamente paralleli alle $a\,a'$, $b\,b'$, N.° 12, potrà di leggieri trasferirsi l'enunciato criterio al piano (II.°), perciocchè avrassi ombra portata quando la projezione della luce su questo piano sia intercetta all'angolo $a\,M\,b$. Nè riesce inefficace se non quando $D\,E$ sia diametro della parabola $S\,M\,S'$: in tale combinazione esiste ombra projetta finchè l'angolo de' raggi col piano (I.°) sia compreso fra lo zero e novanta gradi. Il contorno dell'ombra risulta in tal caso uguale alla linea che lo causa, e può aversene ragione con un discorso simile a quello usato nel numero precedente nella stessa positura della luce. In generale poi la sua projezione tocca in T, contatto della tangente parallela a $D\,E'$, la parabola $S\,M\,S'$.

Non sia principale ma parallela ad essa la parabola ombrifera $R\,N\,R'$——$X'\,Z'$, e quantunque tutte le sezioni iperboliche parallele alla $D\,E'$ raggiungano il piano $X'\,Z'$ ad angolo $\Gamma\,D\,H$; $\Gamma'\,D'\,H'$ variante, pure avrassi ombra costantemente in ogni posizione della luce intermedia a' limiti prestabiliti. Avvegnacchè scostandosi la sezione $D\,E'$ dal vertice M si allargano sempre più le iperbole, e cresce per conseguenza di pari passo l'angolo predetto $\Gamma\,D\,H$, $\Gamma'\,D'\,H'$ avvicinandosi indefinitamente a 90.°, al contrario nell'approssimare della sezione al vertice M scema quell'angolo tendendo sempre ad eguagliare l'inclinazione degli asintoti coll'asse primo. E se di tutte le sezioni $D\,E'$ .... se ne avessero le projezioni sul piano (II.°), è ben naturale che tutta la variabilità dell'angolo predetto sarebbe ristretta fra gli asintoti dell'iperbola $e\,\gamma\,e'\,\gamma'$, ossia fra le $M\,a$, $M\,b$. Non differiscon dunque i limiti entro cui ponno variare la direzione della luce, e quella d'incontro delle curve iperboliche col piano $X'\,Z'$, per modo che qualunque sia la prima agguaglierà sempre alcuno degli angoli $\gamma\,d\,Z'$, $\gamma'\,d'\,X'$, e dal corrispondente punto D ovvero D' avrà origine l'ombra portata. Come si manifesta naturalmente questo punto D o D', ove la projezione dell'ombra sega quella della linea che l'accagiona non può mai raggiungere P, ovvero P'. A tale combinazione competerebbe la luce inclinata quanto la sezione $P\,P'$, ma questi è caso del limite, e la sezione stessa è contorno dell'ombra.

Tutto quanto si è detto per le sezioni principali e loro parallele è applicabile onninamente a qualunque altra sezione. Non si dà cangiamento che riguardo alle diametrali, ove non sempre l'asse secondo $t\,t'$ dell'iperbola addita in quale ramo di essa cada l'ombra, ma più generalmente parlando il diametro conjugato a quello che è parallelo al piano della sezione ombrifera.

Concludasi dunque generalmente che il contorno dell'ombra portata in sè stessa dalle varie sezioni piane della paraboloide iperbolica è sempre congenere a loro stesse, e che la projezione della luce sul piano (II.°) paragonata alla sezione principale $a\,a'\,b\,b'$ serve di norma per distinguere tutti i casi ne' quali si dà tal sorta di ombra.

25. Ad apprestar mezzi acconci per descrivere il contorno delle ombre sì projette che aderenti a' muri di rivestimento, a' tetti, ad ale di molini a vento, ecc. che sono scopo a queste indagini, siano $M\,B\,M$——$a\,m\,b\,h$ (*Fig.* 25 *Tav. II*) le projezioni di quella porzione di superficie paraboloidica, che è stata il soggetto di tutti i problemi antecedenti, e che è generata dalla retta $M\,H$ scorrente le due M——$m\,a$, $B\,H$——$b\,h$ parallelamente al piano (I.°).

Pongasi a confronto questa parte di superficie con tutta l'intiera indicata nella Fig. 23 Tav. V; ed apparirà chiaramente che le rette cognomini esistenti sull'una e sull'altra si corrispondono, vale a dire che la superficie impiegata nelle suddette costruzioni equivale a quella che si projetta nel triangolo $a\,M\,b$, poste le due parallele $S\,M\,S'$, $\Sigma\,M\,\Sigma'$ uguali, ossia equilatera la paraboloide, senza la qual condizione non ponno essere rettangolari fra loro le rette $a\,a'$, $b\,b'$.

Conducasi una retta mk (*Fig.* 25 *Tav. IV*) parallela ai raggi del sole projettati sul piano (II.°), e dalla sua positura rispetto alle due ma, mb verranno indicate le varie modificazioni del contorno dell'ombra, perciocchè se cada dentro l'angolo amb, avrassi ombra portata, se fuori, ombra propria. Delineata qualunque corda de parallela ad mk, divisa per mezzo in f, e tirata mf indefinita, possono dirsi conjugate fra loro le sezioni fatte per mk, mh' normalmente al piano (II.°). Si descriva la projezione corrispondente ad mh', cioè la parabola MH', che ha il vertice M, l'asse MY, e che passa per il punto H' somministrato dall'analogia

$$bh : BH :: bh' : \frac{bh' \cdot BH}{bh} = BH'$$

le quali rappresenteranno il luogo geometrico de' vertici di tutte le sezioni parallele a quella che addita de, perciocchè sono curve simili e similmente poste. Ora il piano che projetta in ed un raggio di luce sega la superficie in una parabola che ha il vertice f—F, l'asse fF, e due altri punti d—D, e—M. Ne sia pertanto descritta l'altra projezione MFD a cui si guidi PT tangente e parallela a' raggi projettati sul piano (I.°). Conducasi finalmente Tt normale ad XZ che incontri in t la ed, e saranno evidentemente T—t projezioni di un punto spettante al contorno dell'ombra propria.

Ripetendo la stessa costruzione è chiaro che si determineranno quanti punti si voglia del contorno, oppure quanti son necessarj a descriverlo, se vogliasi profittare della cognizione che esso è una parabola. Ma riguardo alla sua projezione sul piano (II.°) si rifletta che il piano del contorno dev'essere normale al (II.°) N.° 13, e quivi si projetta per conseguenza in linea retta. Nè v'ha bisogno di rintracciare altro punto per dirigerla, conciossiachè tutte le sezioni parallele alla de di cui potrebbesi far uso son parabole uguali (Vedasi la Nota VI) co' vertici projettati sulla mh', e quindi i rispettivi contatti co' raggi luminosi equidistano da' vertici stessi. Il luogo geometrico delle loro projezioni dovrà dunque equidistare in ogni suo punto dalla retta mh'.

Se dunque, come più generalmente avviene ne' disegni geometrici, non abbiasi bisogno di ombreggiare che la rappresentazione ortografica, pe' nostri rivestimenti, e pe' tetti della Fig. 3 accadendo essa nel piano (II.°), il contorno dell'ombra apparirà sempre rettilineo. Breve poi ed agevole è il metodo per descriverlo: basta trovare per mezzo della costruzione eseguita un punto t, e per esso far passare la retta qq' parallela ad mh'.

26. Se mk coincida con mb, la superficie $ambh$ sarà tutta in ombra; poichè l'altra projezione MK della luce dà indizio che la generatrice parallela a' raggi luminosi non è compresa nel detto quadrilatero, ed è noto N.° 23, che in tal caso essa separa la parte illuminata dall'oscura; e se coincida con am bisogna tener conto dell'angolo che i raggi fanno col piano (II.°) per vedere se la generatrice loro parallela passa pel quadrilatero $ambh$, e per giudicare in caso diverso se vada tutto illuminato e tutto ombreggiato.

27. Sia in fine la direzione di mk compresa dall'angolo amb (*Fig.* 26 *Tav. IV*). Si descriva la parabola MK projezione sul piano (I.°) della sezione prodotta nella superficie dal piano projettante in mk un raggio solare, a cui venga inscritta la corda MP parallela agli stessi raggi projettati sul piano (I.°), di maniera che saranno P—p le projezioni dell'ombra portata sulla superficie dal punto M—m. E l'analisi fatta sull'indole di questi contorni avendoli dimostrati rettilinei servirà di facile scorta a compierne la loro descrizione. Si conducano dal punto p le due rette pq, pq' ordinatamente parallele alle ma, mb, ed avrassi nella prima l'ombra lanciata da mq, nella seconda quella di mq', conciossiachè le sezioni rettilinee della paraboloide appartengono tutte all'uno od all'altro sistema di generatrici.

Tale descrizione è applicabile ad ombreggiare il tetto della Fig. 3, ma ne' muri di rivestimento (*Fig.* 1) l'orlo che può lanciar ombra, essendo una parabola, che non passa pel vertice *M*——*m* della superficie (*Fig.* 27), quantunque rettilinea avvenga la projezione del contorno sul piano (II.°), non sarà essa determinabile per un solo de' suoi punti, perchè non è costante la sua direzione N.° 24. Descritta pertanto la parabola *MFB*, che è projezione della curva sublime *bg*, si tirino le solite *mk*, *m'k'*, e si descrivano le corrispondenti projezioni sul piano (I.°) delle parabole da loro rappresentate. Da' punti *E*, *E'*, ove segano la parabola *MFB* si inscrivano le corde *EQ*, *E'Q'* parallele alla projezione della luce sul piano (I.°), e si notino le corrispondenti projezioni *q*, *q'* dell'ombra gettata dai punti *E*——*e*, *E'*——*e'*. Avvertasi però che in virtù delle risultanze del N.° 24 potrebbe accadere, non fossero inscrittibili nelle parabole *MEK*, *ME'K'*, cominciando da' punti *E*, *E'*, delle corde parallele alla direzione della luce; ed allora converrebbe ripetere l'operazione sopra altre parallele *m''k''*, *m'''k'''* ecc. alla projezione della luce sul piano (II.°), finchè si potessero ottenere due punti del richiesto contorno.

Soggiungerò finalmente potersi evitare la descrizione delle parabole *MEQ*, *ME'Q'*, usando l'artificio del *Lemma* 16. *Trattato de' contorni delle ombre del signor Bordoni* per scuoprire i punti *Q*, *Q'*.

§ III.

NOTE ANALITICHE

Nota I.

Sia orizzontale il piano (II) (*Fig.* 6 *Tav. II*) a cui dev'essere continuamente parallela la generatrice, e siano *AM*, *Bb* le due direttrici, una delle quali è verticale, il che nulla toglie alla generalità del caso N.° 12 (*) e passa per l'origine *M* delle coordinate, determinato dalla normale comune alle direttrici stesse.

Per un punto Δ della superficie riferibile alle coordinate x, y, z, parallele a' tre assi rettangolari *Mb*, *MY*, *MA* si conduca la generatrice $\delta\delta'$, e per essa e per *AM* il piano (o), verticale, e però rappresentabile da un'equazione della forma

$$y = \theta x$$

nella quale il parametro θ è costante per l'istesso piano, e variabile da un piano verticale all'altro. Dippiù essendo la generatrice sempre orizzontale potrà in ogni posizione essere espressa da un'equazione della forma

$$z = \beta$$

Se dunque il punto Δ si muove sulla superficie, senza sortire dallo stesso piano verticale rimarrà costante il parametro θ, e siccome per tale movimento non sorte neppure dalla generatrice $\delta\delta'$, unica retta che sia comune al piano (o) ed alla superficie, sarà pure costante β, e se al contrario Δ nel cambiar posizione sulla superficie sorte dal piano verticale, passa eziandio da una generatrice all'altra, onde allora θ, β variano contemporaneamente.

Queste superficie sono dunque tali che θ, β ossia le quantità loro equivalenti $\frac{y}{x}$, z sono co-

(*) *Vallée.* Géométrie Descriptive, *N.°* 775.

stanti o variabili insieme. Dunque l'equazione che le rappresenta tutte sarà

$$z = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ove la forma della funzione ϕ dipende dalla posizione della direttrice Bb, che finora non è stata impiegata.

Essa è rappresentabile dalle equazioni

$$(1) \ldots x = h \qquad (2) \ldots y = mz$$

in consegnenza d'aver collocato l'asse delle x nella Mb, normale comune delle direttrici. Eliminando le tre quantità x, y, z fra le quattro equazioni

$$(1), (2), \frac{y}{x} = \theta, z = \phi(\theta)$$

se ne avrà una della forma

$$F(\theta, \phi(\theta)) = 0$$

in cui sostituendo per θ, e $\phi(\theta)$ i rispettivi suoi valori otterrassi l'equazione della superficie

$$(F) \ldots\ldots\ldots hy - mxz = 0$$

Nota II.

Si applichi l'equazione della superficie alla nota formola generale $dx\,dy\,dz$, considerando il solido che si projetta sul piano (n.°) delle x, z (*Fig.* 10 *Tav. III*) nel trapezio $AabH$ per modo che sostituendo il valore di y tratto dalla (F) (Nota I) hassi da integrare la formola

$$\frac{mxz}{h}\,dx\,dz$$

Ora $\int \cdot z\,dz = \frac{z^2}{2}$, e quest'integrale va compreso fra il piano (Π), ed il piano projettante (σ), che sega la superficie nella parabola γab. Il primo di questi limiti è dato da $z = MA$, ed il secondo è in generale $z = f(x)$, per determinar la quale è mestieri fissar la positura del piano (σ). Le equazioni (1) (2) della Nota I danno i valori analitici di $Mb = h$, $MA = 1$, $HB = m$, per modo che se facciasi $Ma = n$ sarà l'equazione del piano (σ) $z = \frac{n}{h}(h - x)$, secondo limite dell'integrale. Il primo dà $\frac{1}{2}$, e questo secondo $\frac{n^2}{2h^2}(h - x)^2$, cosicchè resta da integrare

$$\int \cdot \frac{mn^2 x\,dx}{2h^3}\left(h^2\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) + 2hx - x^2\right) = \frac{mn^2 x^2}{48h^3}\left(12\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) + 16hx - 6x^2\right)$$

I limiti della x sono il piano delle y, z, ed il (Σ), cioè $x = 0$, $x = h$, e perciò il solido ricercato

$$AabHB = \frac{mh}{48}(12 - 2n^2)$$

Nota III.

Non tutte le costruzioni idrauliche delle quali l'Ingegnere ha bisogno di conoscere massa e volume, si compongono di materiali configurati per guisa da combaciare esattamente gli uni cogli altri, e senza soluzione di continuità; nè sempre van collegati tra loro da un cemento che ripari alle accidentali irregolarità, come succede ne' muri composti di pietre naturali, o

artificiali. Le fascinate tanto commendate da' Belidor e da Schemerl di Leytenbach pel Reno e pel Danubio, le buzzonate sì vantaggiosamente usate nel nostro Po, e tant' altri generi di lavoro destinati alla difesa delle arginature de' fiumi diversi da un paese all' altro, lasciano tra materiale e materiale delle intercapedini in causa della loro forma cilindrica. E se diasi una di queste opere a rintuzzare l' urto di un' acqua corrente, come sarebbe un pennello, egli è ben naturale che la sua resistenza proporzionata al peso, avrà pure rapporto alla quantità di materia che in essa si contiene.

Additi pertanto la Fig. 11 il profilo di una buzzonata o di una fascinata, e notisi $2r$ il diametro de' buzzoni o delle fascine, a la base, b l' altezza del profilo. Apparisce che $\frac{a}{2r}$ sarà il numero de' buzzoni di ciascuno strato orizzontale, e $\frac{b}{r\sqrt{3}}$ quello del numero degli strati, perchè appunto l' altezza $CH = r\sqrt{3}$ del triangolo equilatere ABC comprende due mezzi strati. Onde il numero totale de' buzzoni che si contengono nel profilo di area ab risulta

$$\frac{ab}{2r^2\sqrt{3}}$$

che moltiplicato per la sezione circolare πr^2 di cadaun materiale (π è il rapporto della circonferenza al diametro) costituisce l' espressione di tutta l' area occupata da' buzzoni, ovvero dalle fascine

$$\frac{\pi ab}{2\sqrt{3}}$$

Questo risultamento semplicissimo indipendente dal raggio annunzia costante la quantità di materia che entra in siffatte opere, grande o piccola che sia la base de' cilindri.

Il buzzone è una fascina di sottili legna o di canne palustri che rivestono con varie legature a distanza costante una certa quantità di materie petrose o terree, e non può servar costante la sua gravità specifica sotto qualsivoglia dimensione, se la grossezza del rivestimento non sia proporzionale al diametro del buzzone. Il maneggio di questi materiali, e nella loro costruzione, e nel porli in opera, esige maggior consistenza ne' più grandi; e per verità si stila dagl' Ingegneri di prescrivere maggiore robustezza alla camicia de' grandi che de' piccoli buzzoni. Per soggettare a calcolo questa variazione di grossezza, io ammetterò che abbia luogo qualche rapporto tra il diametro dal buzzone e la grossezza del suo rivestimento, e di tanto miglior grado, quanto che l' abitual metodo di costruzione non può scostarsi da questa legge per modo che le conseguenze da essa derivabili siano per essere fallaci.

Ad opera compita i buzzoni devono sformarsi in virtù del proprio peso e di quello de' sovrastanti, e si vede che il diametro orizzontale ab di cadaun di loro non si può alterare, perchè se il peso a lui incumbente tenta stirarlo, di altrettanto tende a restringerlo il peso uguale che preme i due adiacenti, e queste forze distruggendosi vicendevolmente lasciano immutato il buzzone nel senso orizzontale. Gli altri due diametri cd, ef si contrarranno e pel proprio peso, se il rivestimento non sia bastantemente grosso da resistergli, e per quello degli strati superiori, sforzando una parte delle materie che riempiono il buzzone ad incastrarsi frammezzo l'altra parte, che spinta ed incalzata sboccierà dalla periferia circolare ne' sei intervalli distinti da' punti del contatto. A nulla monta lo sregolato variare de' buzzoni; basta essere convinti che ciascuno strato diminuirà la sua altezza in ragione del peso particolare de' buzzoni, e di quello che gli sovrasta, il quale come è naturale, si proporziona al numero degli strati superiori. Questa è legge riscontrata eziandio ne' fluidi compressibili (1).

(1) *Mariotte. Mouvement des eaux. Partie II.*

Additi dunque $2hr$ l'altezza cui si riduce il diametro verticale d'ogni buzzone in virtù del proprio peso, e dipendentemente dalla qualità forma e dimensioni delle materie componenti, non che dal metodo di costruzione; circostanze uguali per ogni buzzone, e che potrebbero anche sperimentarsi per determinare h con sufficiente approssimazione. Una funzione congenere rappresenterà l'altezza diminuita del secondo strato, terzo, quarto ecc. e si otterrà sostituendo nella $2hr$ a luogo dell'altezza $2r$ dello strato sublime quelle ridotte di cadun' altro, onde fia nota la legge del loro variare

$$2^r \left\{ h, h^2, h^3 \dots\dots\dots\dots h^{\frac{b}{r\sqrt{3}}} \right\}$$

La somma $\int = 2hr \frac{h^{\frac{b}{r\sqrt{3}}} - 1}{h - 1}$ di questa serie rappresenta l'altezza cui si riduce una buzzonata a lavoro compito. Sviluppata la funzione esponenziale si avrà

$$h^{\frac{b}{r\sqrt{3}}} = 1 + \frac{b}{r\sqrt{3}} \log. h + \frac{b^2}{2 \cdot 3 r^2} \log.^2 h + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot r^3} \log.^3 h + \text{ec.}$$

ov' è da riflettere che h essendo sempre minore dell'unità, tutti i termini della serie successivi al primo riusciranno negativi, ed il loro aggregato necessariamente minore dell'unità. Ora si ottiene

$$\int = \frac{2hb \log. h}{\sqrt{3}(h-1)} \left\{ 1 + \frac{b}{2 \cdot r\sqrt{3}} \log. h + \frac{b^2}{2 \cdot 3 \cdot 3 r^2} \log.^2 h + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot r^3} \log.^3 h + \text{ecc.} \right\}$$

nella quale espressione la somma degl' infiniti termini che seguono il primo sarà a più forte ragione negativa. Ma questa quantità impiccolisce aumentando r, e quindi cresce il valore della serie. Dunque $\int$ è una funzione che non ammette nè valor massimo nè minimo variando corrispondentemente ad r.

Da ciò risulta che le buzzonate si comprimono tanto più quanto è minore il diametro de' buzzoni, e quindi sotto egual volume comprendendo maggior quantità di materia acquistano più gagliardia per resistere tanto alla pressione che all' urto del fiume.

Ma pure la compressione de' fluidi non succede in ragione dal peso premente che dentro certi limiti, e potrebbesi muover dubbio che volendo far presiedere questa legge al costiparsi delle buzzonate, i suoi limiti si restringessero per modo ch'essa non fosse attendibile nemmeno da strato a strato. Così è a tutto rigore; nondimeno le aberrazioni procederanno gradatamente, e nelle ordinarie altezze di queste costruzioni idrauliche può ammettersi che la formola dia ancora con bastante approssimazione il loro restringimento. E sempre starà che tanto più s'addensano le buzzonate quant' è minore il diametro de' buzzoni, come dimostra quella formola. La qual proposizione si può dimostrare anche senza ajuto di calcolo. Il rivestimento e le legature ne' buzzoni si oppongono alla pressione delle materie contenute che tende a sfiancarli, e che naturalmente è proporzionale al loro peso; dunque nelle buzzonate essendo costante la somma, sì delle materie contenute che de' rivestimenti, se venisse occupata l'altezza loro da un solo strato, tutta la pressione sarebbe contrariata da tutta la resistenza. Viceversa dividendo l'altezza in strati, si spezzano corrispondentemente queste due forze, e le loro parti si contrastano nell' istesso rapporto delle forze totali. La sovrimposizione degli strati poi cumula sopra gl' intermedj alla pressione loro propria quella eziandio degli strati che le sovrastano, cosicchè riguardo all' infimo la somma di queste due pressioni supera il peso tutto delle materie rivestite, e la parziale resistenza del rivestimento non può essere che una parte della totale contropressione. Procedendo dall'imo strato al sommo la resistenza non varia, e la pressione scema di mano in mano, finchè nell'ultimo si corripondono queste due forze nella ragione delle rispettive loro somme,

ed è manifesto che la serie di questi rapporti parziali, avendo costante il primo termine nello strato sublime, prossegue per maggior numero di termini, ed i loro effetti poi con maggiore divergenza, quant'è più spezzata l'altezza totale in minuti strati. È dunque evidente il perchè le buzzonate devono comprimersi più se sia minore il diametro de' buzzoni, ed anche se la grossezza de' rivestimenti non impiccolisca esattamente nella ragione de' diametri, finchè la loro resistenza rinforzata da questa violazione della legge non pervenga ad elidere le replicata pressioni. Ma a tanto limite non potranno giungere queste anomalie che in pari tempo diminuiscono la gravità specifica di tutta l'opera, la quale per conseguenza non acquisterà maggior fermezza, restringendo i buzzoni e variando disordinatamente la grossezza de' loro rivestimenti, se l'azione combinata di queste due forze non rimanga sempre al dissotto delle ripetute pressioni. Ecco perchè ho prenotata giusta questa conseguenza, quantunque la pratica degl'Ingegneri non sia rigorosa nell'assegnare a' rivestimenti grossezza proporzionata al diametro de' buzzoni.

Opere di simil fatta non sono in balìa di que' soli attacchi del fiume che tentano di spostarle o rovesciarle, anzi essendo esse interrotte e prive di ogni legame fra parte e parte, gli assalti più pericolosi e nocivi fian quelli che mirano alla loro rovina spingendosi fra buzzone e buzzone per iscompaginarli e fargli scoscendere. Destinate, può dirsi esclusivamente, sul Po a riparare le corrosioni e franature degli argini, è ben naturale che questa sola può essere la causa di loro distruzione. E comechè vero sia, generalmente parlando, che un materiale di più gran mole resiste con maggior gagliardìa ad essere slogato e trasportato da un'acqua corrente, pure qui è da considerare che non ugual quantità d'acqua investe ciascun buzzone, grande o piccolo ch'ei sia venendo essa determinata dall'area de' sei interstizj che contorna ciascun di loro e che varia corrispondentemente ad essi, per modo che se i buzzoni non si sformassero ad opera compita, dubbio non è che gli assalti parziali contro ogni buzzone sarebbero proporzionati al grado peculiare di loro resistenza; ma è dimostrato che tanto più si costipano quanto è minore il loro diametro, cosicchè la forza dell'attacco diminuisce in ragion maggiore di quel che faccia la resistenza che ciascuno le oppone. Finalmente se la corrente del fiume o qualche vortice riesca per azzardo a smuovere uno o più buzzoni, egli è ben naturale che tanto minor numero ne terrà dietro a' primi, quant'è più piccolo il loro diametro, in quella guisa stessa che più lieve sconcerto recasi ad un mucchio di miglio, che ad un ammasso di grosse palle da cannone, rimovendo qualche sfera nell'uno o nell'altro.

Si vede dunque che codeste opere acquistano maggior scossa contro ogni genere di attacco all'impiccolire del diametro de' buzzoni, e perchè raccolgono più gran massa sotto egual volume, e perchè ogni parte individua è attaccata più debolmente di quanto compete al suo diminuire, e perchè qualunque scomposizione produce sempre menomo disordine. Ma se per una parte la geometria non assegna limite all'assottigliamento de' buzzoni ben altri rispetti fisici additeranno alla pratica, che non è permesso violare quel limite in cui la velocità dell' acqua comincia ad essere suscettiva di trasportar seco i buzzoni, se vengono svincolati dagli altri, ed abbandonati a loro stessi. Norma semplice, piana e di facile esecuzione, poichè darà campo sicuramente a poter restringere il diametro de' buzzoni, quanto sia compatibile colle dimensioni, forma e peso de' materiali che vengono impiegati nella loro confezione, ed a cui nulla toglie obbiettare che essa risulta supponendo le buzzonate eseguite con quella regolarità e precisione cui non può aspirare la pratica. Avvegnachè se vorrassi per ultimo elemento introdurre in queste ricerche la disposizione sregolata e tumultuaria de' materiali, non verrà perciò accreditata quella sentenza volgare che le sostanze ammassate senz'ordine occupano maggior volume quanto più sono divise e spezzate, come avviene per esempio delle terre vergini e delle legna da fuoco, che tanto maggiormente si addensano quanto più voluminose sono le zolle o le stipe, e come nei

muri d'opera incerta, pei quali Vitruvio insegna che le pietre sian piccole, affinchè la sovrabbondanza del calcestruzzo li renda più forti. Ciò deriva puramente dalla dissomiglianza ed irregolarità di figura, e prova ne fa un vaso riempito alla rinfusa con pallini di piombo or minuti or grandi, che serva costante peso in ogni combinazione. La somiglianza di figura ne' corpi ha tanto potere che agguaglia tutte le eventualità di disposizione, qualunque sia la loro mole, di maniera che le buzzonate conserveranno massa costante qualunque adagiamento prendono i buzzoni in opera, e la regola stabilita rimarrà sempre mai inconcussa e salda.

Nota IV.

Applicata l'equazione della Nota I alla formola degli spianamenti

$dx\,dz\,\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}$ risulta da integrare $\frac{dx\,dz}{h}\sqrt{(h^2+m^2x^2+m^2z^2)}$ ove

$$\int dx\sqrt{(h^2+m^2x^2+m^2z^2)}=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{(h^2+m^2x^2+m^2z^2)}+\frac{h^2+m^2z^2}{m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2x^2+m^2z^2)}+mx}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}\right\}$$

supposta costante z. E prendendo a considerare la superficie projettata nel rettangolo $AMbD$ (*Fig.* 7) x va compresa fra i limiti zero, $Mb=h$, per cui torna da integrare

$$\frac{dz}{2h}\left\{h\sqrt{(h^2+h^2m^2+m^2z^2)}+\frac{h^2+m^2z^2}{m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}\right\}$$

Ora si ha parimenti

$$\int h\,dz\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}=\frac{h}{2}\left\{z\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+\frac{h^2+m^2h^2}{m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2}}\right\}$$

ed integrando per parti, i quattro termini logaritmici, dopo avere eliminate le quantità che si distruggono, risulta

$$\int dz\frac{h^2+m^2z^2}{m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}$$

$$=\frac{h^2}{m}\left[z\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}+m^3h\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}(h^2+m^2z^2)}\right]$$

$$+\frac{m^2}{m}\left[\frac{z^3}{3}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}+\frac{m^3h}{3}\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}(h^2+m^2z^2)}\right]$$

Le due sommatorie si rendono razionali colla sostituzione $\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}=z\omega$, e fatta l'integrazione a dovere ritornando il valore di ω in funzione di z

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}(h^2+m^2z^2)}=\frac{1}{m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2}}$$

$$+\frac{1}{m^2}\,arc.\,tang.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}}{m^2z}$$

$$\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}(h^2+m^2z^2)}=h^2\left[\frac{z\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}}{2h^2}\right.$$

$$\left.-\frac{m^2+3}{2m}\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2)}}-\frac{1}{m^2}\,arc.\,tang.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}}{m^2z}\right]$$

e però l'integrale di tutta la formola sarà

$$\frac{1}{3.4hm}\left[hm(3+m^4)z\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+2(3h^2+m^2z^2)z\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2z^2)}}\right.$$

$$+h^3(3+9m^2-3m^4-m^6)\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}+mz}{\sqrt{(h^2+m^2h^2)}}$$

$$\left.+2h^3m(3-m^2)\,arc.\,tang.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2z^2)}}{m^2z}\right]$$

I limiti di questo integrale sono $z=0, z=MA=1$, il primo de' quali lo riduce a

$$2h^3m(3-m^2)\frac{\pi}{4}$$

indicando π la circonferenza, e quindi l'integrale completo diventa

$$\frac{1}{3.4hm}\Big[hm(3+m^4)\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2)}+2(3h^2+m^2)\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2)}+mh}{\sqrt{(h^2+m^2)}}$$
$$+h^3(3+9m^2-3m^4-m^6)\log.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2)}+m}{h\sqrt{(m^2+1)}}$$
$$+2h^3m(3-m^2)\left(arc.tang.\frac{\sqrt{(h^2+m^2h^2+m^2)}}{m^2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big]$$

Per mezzo di questa formola potrà valutarsi in ogni occorrenza la superficie paraboloidica equilatera, semprecchè i limiti delle variabili x, z, ossia i piani che circoscrivono la superficie ricercata siano paralleli ai coordinati. Altrimenti, come pe' muri del N.° 1, per le ale de' molini a vento (*Fig.* 2) converrà attribuire alla variabile x i limiti $h, \frac{h}{n}(n-z)$, come si è fatto nella Nota II, il che renderà più lunga l'integrazione della formola riguardo alla z, senza però apportarvi maggiori difficoltà.

Giova peraltro osservare che le superficie di rivoluzione son divise in parti uguali simili e similmente poste da ciascùn piano che contenga l'asse, la qual proprietà nella presente paraboloide restringesi a soli quattro piani rappresentati in MA, Mb, MX', MZ', (*Fig.* 12) che contengono, i due MX', MZ', le sezioni principali e paraboliche della superficie; ed i due MA, Mb la terza sezione principale e rettilinea. Le porzioni di superficie projettate negli otto angoli uguali che formano queste quattro rette intorno al punto M sono dunque uguali fra loro, e così dicasi per tutte le figure simili, uguali, e similmente disegnate in cadaun di loro. Pertanto se il piano (σ) della fig. 10 rappresentato in bd (*Fig.* 12) sia inclinato a 45° coll'orizzonte, cioè parallelo ad MX', potrà valere la stessa formola ad appianare la superficie projettata in $dAHb$ sottraendo dal valore ch'essa produce quando $z=1$ il risultamento che dà $z=\frac{h}{\sqrt{2}}$, avvegnachè i triangoli Mde, Meb, Mbf sono eguali, simili, e similmente posti i primi due rapporto ad MZ', il secondo ed il terzo rispetto ad Mb, e quindi la superficie projettata in Mdb uguale all'altra che si projetta in $Mebf$.

Qualunque altra posizione abbia il piano (σ) (*Fig.* 10), vien meno quest'artifizio, e può aversene anche ragione permutando i piani delle xy, yz rappresentati dalle MA, Mb (*Fig.* 12) in due altri qualunque rettangolari scambievolmente, e con quello delle xz. Per le note formole hassi

$$z=\theta z'-\beta x', \quad x=\beta z'+\theta x'$$

nominando $x'z'$ le nuove coordinate, onde l'equazione (F) della Nota I, si trasforma nella

$$hy=m\theta\beta(z'^2-x'^2)$$

che applicata alla formola generale degli spianamenti dà

$$\iint\cdot\frac{dx'dz'}{h}\sqrt{\left(h^2+4m^2\theta^2\beta^2(z'^2+x'^2)\right)}$$

Ora se abbiasi $4\theta^2\beta^2=1$ questa formola identificàsi con quella che si è integrata, e quindi le porzioni di paraboloide contenute sì fra i piani MA, Mb, che fra i nuovi coordinati stabiliti da questa condizione, ed uguali limiti, sono eguali. Le quantità θ, β additando seno e coseno dell'angolo che uno de' primi piani coordinati fa col suo corrispondente sono legate ancora dall'altra condizione

$$\theta^2 + \beta^2 = 1 \quad (*)$$

e però $\qquad 4\theta^4 - 4\theta^2 + 1 = 0$ che dà $\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta$

Dunque il solo sistema di piani a 45° coi primi coordinati soddisfa questa condizione, ossia divide la paraboloide in parti simmetriche.

Nota V.

Tutte le generatrici della paraboloide normale sono perpendicolari alla retta $E'F'$ (*Fig.* 18. *Tav. IV*) e quindi essa fa parte della sezione principale e rettilinea di questa superficie equilatera. Ma non è sì evidente che il suo vertice debba essere nel punto E', e però supponendola ritornata nello stato di tangenza N.° 19 si noti il punto B' ove una generatrice qualunque $F'B'$ incontra il piano (Π). Si tirino AH', $F'H'$ intersezioni del piano $F'E'A$ coi due (P) ed (O); e si osservi che il piano $H'F'B'$ sega il (Π) nella retta $H'B'$ perpendicolare ad AH'.

Ciò premesso alle denominazioni della nota I.ª si aggiunga $ME' = \omega$ per cui $fF' = HH' = m\omega$, $AH' = \sqrt{(h^2 + m^2\omega^2)}$, e per le note formole trigonometriche che esprimono un angolo differenza di altri due

$$sen.\, B'AH' = \frac{mh(1-\omega)}{\sqrt{(h^2+m^2)}\sqrt{(h^2+m^2\omega^2)}},\ cos.\, B'AH' = \frac{h^2+m^2\omega}{\sqrt{(h^2+m^2)}\sqrt{(h^2+m^2\omega^2)}}$$

$$\text{onde } cos.\, B'AH' : sen.\, B'AH' :: AH' : H'B' = \frac{mh(1-\omega)\sqrt{(h^2+m^2\omega^2)}}{h^2+m^2\omega}.$$

ripetuto questo calcolo per un'altra generatrice ΔL della paraboloide tangente, è ben naturale che risulterà

$$N'L = \frac{m'h'(1-\omega)\sqrt{(h'^2+m'^2\omega^2)}}{h'^2+m'^2\omega}$$

$$\text{ove } h' = AN,\ m' = NK = \frac{mh'}{h}.$$

Si confrontino ora i due rapporti $\frac{B'H'}{AH'}$ $\frac{LN'}{AN'}$, e sostituendo per m' il suo valore si vedrà che entrambi diventano

$$\frac{mh(1-\omega)}{h^2+m^2\omega}$$

la qual eguaglianza dimostra che i tre punti A, L, B' della paraboloide tangente sono costituiti in linea retta. Dunque le generatrici del secondo sistema sono parallele al piano (Π), ossia perpendicolari alla generatrice AE' del primo, che diventa perciò l'altra retta della sezione principale, e per conseguenza il vertice della superficie normale si ha nella intersezione E' delle due generatrici principali $E'A$, $E'F'$.

Nota VI.

Non solamente le paraboloidi hanno uguali fra loro le sezioni parallele alle parabole principali, come dimostra Hachette ai Numeri 118, 120 del suo trattato delle superficie di secondo grado, ma generalizzasi questa proprietà a tutte le sezioni parallele e paraboliche che si possono fare nelle due superficie. Bordoni fa vedere questa proprietà riguardo alla paraboloide

(*) *Larcoix. Application de l'algèbre à la géometric.* N.° 124.

elittica nel Lemma 6.° dell'opera sui contorni delle ombre, ed è necessario al presente uopo darne ragione per quanto spetta all'altra paraboloide equilatera.

Seghi dunque la superficie un piano normale a quello delle x, z contenendo l'origine delle coordinate, e quindi esprimibile da un'equazione della forma

$$z = A x.$$

Eliminando fra questa equazione e quella della superficie ((F) Nota I.) l'ordinata z, risulta la projezione della loro linea comune sul piano delle x, y

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x^2 = \frac{h}{mA} y$$

Un altro piano parallelo al precedente tagli la paraboloide, e la sua equazione $hy = mxz$ combinata con quella del piano secante

$$z = A x + B$$

dà la projezione della nuova intersezione sullo stesso piano coordinato

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{h}{mA}\left(y + \frac{mB^2}{4hA}\right)$$

Le due parabole (1) e (2) sono uguali ed i piani delle corrispondenti obbiettive son paralleli, dunque sono eguali esse pure. Non variano che nella posizione, la seconda avendo per coordinate del vertice $\frac{B}{2A}$, $\frac{mB^2}{4hA}$.

Questo ragionamento può ripetersi ugualmente sulle equazioni di tutte due le paraboloidi riferite a' piani principali ne' citati luoghi del sig. Hachette, e qualora la elittica sia di rivoluzione risultane la singolar proprietà che tutte le sezioni parallele all'asse son parabole uguali.

SPERIENZA

PER MISURARE LA QUANTITÀ D'ACQUA CORRENTE

NEL TEVERE

RIFERITA

DA BONAVENTURA BENETTI

INGEGNERE PONTIFICIO E PROFESSORE D'IDROMETRIA NELLA SCUOLA DEGL'INGEGNERI.

Nello scorso anno 1820 si pubblicarono le Sperienze d'idrometria fatte coll'asta ritrometrica dove il Po stabilisce il settentrionale confine della provincia di Ferrara, e precisamente nei contorni di Fossa d'Albero, villaggio situato alla destra di quel fiume, sette miglia al di sotto di Lagoscuro (*).

Si producono in quest' anno consimili prove fatte nel Tevere vicino a Roma nell' intervallo fra Ponte Molle e l' ingresso del fiume della città. Avremo cura di descriverle in modo che si vegga per minuto tutta la condotta dell' esperimento, per poterla imitare in altre occasioni; desiderando di render famigliare l'uso di questo metodo che è assolutamente il più spedito e il più facile che possa usarsi ne' grandi fiumi, e forse il solo praticabile ne' fiumi pieni e grandissimi.

Divideremo perciò questa Relazione in tre parti. La prima esporrà le indagini preliminari per la scelta del luogo, e i preparativi della sperienza. La seconda descriverà il modo tenuto nel fare l' esperienza. La terza il modo tenuto nel calcolarne i risultati.

Il sig. Ispettore Luigi Gozzi che in più occasioni e singolarmente in compagnia del celebre cav. Bonati erasi accostumato al maneggio dell' aste ritrometriche, ebbe cura di preparare e dirigere l' esperimento, al quale oltre i Professori e gli Allievi della Scuola assistè e cooperò con molto zelo il sig. Pietro Fortuna, Ingegnere Aspirante addetto ai lavori del Tevere.

I.

Indagini preliminari.

Disegnato un tratto del fiume il più retto e il più regolare che ad occhio potesse discernersi, prima di risolversi a far quivi lo sperimento delle aste, si giudicò ben fatto di percorrere colla

(*) *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella Scuola degl' Ingegneri l'anno* 1820, *pag.* 11.

barchetta più volte quel tratto seguendo linee a un dipresso parallele alla sponda, e praticandovi frequenti scandagli per assicurarsi se le profondità lungo quelle linee erano a un dipresso uniformi, e se le aste avrebbero potuto camminarvi senza essere disturbate dall' incontro dei ridossi, e quale lunghezza dovessero per ciò avere. È chiaro che in ciascheduna perpendicolare si debbe adoperare l' asta la più lunga e che s' accosti al fondo quanto più si può senza correr pericolo che sia fermata nel suo piede dall'inciampo di qualche risalto del fondo. La lunghezza conveniente alle aste da porsi in opera in ciascuna perpendicolare non può ben determinarsi senza questa preliminare investigazione de' fondi del fiume nel tratto da sceglersi per l'esperienza.

Scelto in questo modo un tronco del Tevere lungo 60 metri, furono rilevate le sezioni del fiume alle due estremità di questo tronco. La sezione superiore a fior d' acqua era larga metri 70,39; l' inferiore metri 77,64 come è notato nel disegno Tav. VI. La larghezza di queste sezioni era tale che permise di rilevarle al modo ordinario, vale a dire coll' attraversare il fiume con una funicella ben tesa, e divisa con segnali in parti metriche, e scandagliare il fondo sotto ciascuna divisione.

Le aste ritrometriche furono formate di varj pezzi cilindrici di pioppo del diametro di metri 0,04 da potersi unire e disgiungere. E così con pochi pezzi variamente combinati si componevano anche sul momento le aste ora più lunghe ora meno, secondo il bisogno. L'artificio con cui si congiungono insieme due pezzi è mostrato nella Tav. VI. Fig. 1. (*).

Al pezzo che forma l' estremità inferiore dell'asta è unito un cilindro di latta (*Fig.* 2) dove s' introducono pesi cilindrici di piombo quanti ne occorrono per fare che l' asta rimanga quasi del tutto sommersa, non dovendo sporgerne fuori dell'acqua che una piccola parte lunga due o tre decimetri al più.

Il pezzo che forma l' estremità superiore sporgente dall' acqua porta in cima un ancoretta (*Fig.* 3) formata da quattro uncini di filo cotto di ferro, affinchè l'asta giunta alla sezione inferiore s' attacchi alla fune e quivi si fermi, come si dirà appresso.

Così preparate le aste, ed inverniciate perchè non s' imbevessero d' acqua restava solo a determinarsi il peso di cui dovevano caricarsi secondo la loro diversa lunghezza, all' effetto che rimanessero quasi del tutto sommerse. Questo peso fu sperimentato sul fiume stesso, caricando ciascun' asta a poco a poco fino ad ottenere il grado sufficiente d' immersione. Per non ismarrirle durante queste prove, si tenevano raccomandate ad una cordicella lenta.

II.

Sperienze.

Preparate in tal modo le cose si venne all' esperimento nel dì 19 giugno 1821. In questo giorno il pelo del Tevere segnava metri 1,17 sotto il piano dell' ultimo gradino al Passo-porto di Ripetta in linea della fabbrica Doganale (**); e però veniva ad essere superiore di soli

(*) *Tav. VI Fig.* 1. a b c d *verga di ferro attorno l'asta o bastone cilindrico di legno* AB. CF, *tubo di latta annesso al bastone cilindrico di legno* ED.

r, *uncino di ferro destinato ad abbracciare la verga* a b c d.

Fig. 2. F G, *recipiente cilindrico di latta capace di contenere pesi di piombo* s, s', s'', s''' *ed un bastoncino di legno e per empire il vano ove occorra.*

Fig. 3. I N, *Ancora da congiungersi al pezzo superiore delle Aste.*

(**) *Il piano del predetto ultimo gradino è superiore al pelo basso del Mediterraneo metri* 7,66 *giusta il Profilo Chiesa e Gamberini.*

metri 0,73 al pelo della massima magra. Questo segno osservato al principio e riscontrato alla fine dell' esperimento diede a conoscere che durante l' esperienza il fiume non fece alcuna mutazione. La giornata era quieta e senza vento sensibile.

S' incominciò dallo stendere una funicella ben tirata e divisa con segnali in parti metriche sulla sezione superiore; ed un' altra simile sulla sezione inferiore. La prima stava a qualche altezza sopra il pelo dell' acqua, affinchè vi potessero passar sotto liberamente le aste, che si dovevano buttare a fiume alquanto più sopra, onde arrivassero alla prima sezione dopo aver già concepito un moto equabile e presa un' inclinazione costante. La seconda al contrario era tirata quasi a fior d' acqua, affinchè le aste quivi arrivate potessero attaccarvisi mediante gli uncini, sì per la facilità di ricuperarle, come per determinare il punto preciso del loro appulso alla sezione inferiore.

Tre operatori sono necessarj e bastano all' esperienza. Il primo stando in barchetta cinque in sei metri al di sopra della prima sezione è incaricato di buttare le aste e di notare il punto del loro passaggio per la prima sezione riferendolo ai segnali o divisioni della fune tesa sopra quella sezione: ha cura d'immergere l'asta a poco a poco spingendola obbliquamente contr'acqua, onde poi lasciata a sè stessa si raddrizza, prende una positura costante, ed arriva alla sezione con moto già reso progressivo ed uniforme. Il secondo operatore stando in barchetta poco sotto la sezione inferiore accorre a ricovrare le aste che sono incastrate nella fune, e nota similmente il punto del loro arrivo a quella sezione. Il terzo finalmente stando sulla ripa osserva con un orologio a' secondi il tempo impiegato dall' asta a correre i 60 metri d' intervallo da una sezione all' altra. E questa bisogna può comodamente farsi da un solo osservatore che collocandosi rimpetto alla prima sezione per aspettarvi il passaggio dell' asta, ha poi tutto il tempo di precorrerla e mettersi dirimpetto alla seconda sezione per aspettare il suo arrivo.

Tutte le nostre aste camminarono o verticali o alcun poco inclinate in avanti; e non molto si allontanarono dal percorrere linee parallele alle sponde, come può vedersi nel disegno della Tav. VI, dove sono segnate coi loro precisi intervalli le linee *Aa*, *Bb*, *Cc* ecc. percorse da ciascun' asta.

Per evitare la confusione nel disegno, non vi si sono scritte le profondità dell' acqua in ciascuno de' punti del passaggio delle aste per le due sezioni. Queste profondità si raccolgono dal rilievo che erasi già fatto delle sezioni, come si è detto all' Art. I: e furono come segue:

Sezione superiore	*Sezione inferiore*
A...... 2,24	*a*...... 2,90
B...... 3,00	*b*...... 3,14
C...... 3,26	*c*...... 3,09
D...... 3,32	*d*...... 3,04
E...... 3,34	*e*...... 2,95
F...... 3,56	*f*...... 3,00
G...... 3,68	*g*...... 3,45
H...... 4,36	*h*...... 4,43
I...... 4,84	*i*...... 4,14
L...... 4,80	*l*...... 4,06
O...... 4,82	*o*...... 4,04
P...... 4,92.	*p*...... 4,04

Sperienza I. Un' asta lunga metri 1,71 col suo centro di gravità distante dall' estremo inferiore m. 0,645 corse la linea Aa in minuti secondi 108.

Sperienza II. Un' asta di metri 2,21 col centro di gravità distante m. 0,69 dall' estremo inferiore corse Bb in 78".

Sperienza III. Altra simile corse Cc in 57".

Sperienza IV. Altra simile corse Dd in 59".

Sperienza V. Altra simile corse Ee in 55".

Sperienza VI. Altra simile corse Ff in 50".

Sperienza VII. Un' asta di metri 3,21 col centro di gravità distante m. 0,93 dall'estremo inferiore corse Gg in 54".

Sperienza VIII. Altra simile corse Hh in 51".

Sperienza IX. Un'asta di metri 4,21 col centro di gravità distante m. 1,185 dall' estremo inferiore corse Ii in 54".

Sperienza X. Altra simile corse Ll in 54".

Sperienza XI. Altra simile corse Oo in 61".

Sperienza XII. Altra simile corse Pp in 71".

Sperienza XIII. Affine di riscontrare se le velocità dell' acqua in una stessa perpendicolare andassero diminuendo di mano in mano che si discende verso il fondo, come è osservazione quasi costante, e come già ne dava indizio il vedersi le aste camminare alquanto piegate in avanti, si buttò verso il filone del fiume tra i punti H ed I un' asta più corta, lunga un solo metro. Essa corse l' intervallo tra le due sezioni in 45".

Sperienza XIV. Un galleggiante di sughero gettato nello stesso luogo corse lo stesso intervallo in 44".

Per ultimo fu esplorata con livello a bolla d' aria l' inclinazione del pelo d' acqua, e fu trovato essevi la caduta di m. 0,032 nella distanza di metri 245.

III.

Calcolo e risultati delle sperienze.

Poichè le aste, come si è detto, camminavano diritte con pochissima declinazione dal perpendicolo, ne segue che senza tema d' errore la velocità di ciascun' asta può aversi per la velocità media dell' acqua nella perpendicolare abbracciata dall' asta medesima.

E la media aritmetica tra le velocità di due aste che percorrono due perpendicolari vicine tra loro, può aversi per la velocità media dell' acqua nel trapezio terminato da quelle due perpendicolari.

Quanto ai due triangoli compresi tra le perpendicolari estreme e le ripe, la velocità media in ciascuno di questi triangoli si potrà far conto che sia quella stessa delle perpendicolari contigue.

Dappresso questi principj si ordinò il calcolo come si vede nel soggiunto Schema, procedendo nel modo seguente. Consideriamo due linee consecutive Aa, Bb percorse dalle aste. Essendo la profondità in A metri 2,24 ed in a metri 2,90 come si è rilevato dalle sezioni e si è registrato di sopra; la profondità ragguagliata sotto la linea Aa sarà la media tra quelle in A ed in $a=2,57$. Similmente essendo la profondità in $B=3,00$ ed in $b=3,14$ sarà la profondità ragguagliata sotto la linea $Bb=3,07$. Quindi la profondità media del fondo tra le linee Aa, Bb sarà la mezzana tra le profondità in Aa ed in $Bb=2,82$. Altronde essendo

l'intervallo $AB = 4{,}08$ e l'intervallo $ab = 5{,}35$ (vedi la Figura) sarà la larghezza media $= 4{,}715$. Moltiplicando questa larghezza media per la profondità media, si hanno m. q. 13,296 per la sezione media compresa tra le linee *Aa*, *Bb*.

Ora la velocità in *Aa* per la Sperienza I è di metri 0,555 al minuto secondo, e la velocità in *Bb* per la Sperienza II è di metri 0,769. Quindi la velocità media dell'acqua nel solido compreso tra *Aa* e *Bb* sarà di metri 0,662. Moltiplicando questa velocità per la sezione media trovata di m. q. 13,296 avremo m. c. 8,8020 per la portata della sezione suddetta, ossia per la quantità d'acqua che passa in un minuto secondo tra le linee *Aa*, *Bb*.

Si fa un simile calcolo per ciascuna delle parti comprese tra due consecutive linee, e si estende anche alle parti estreme terminate alle ripe, come vedesi nello Schema; e la somma delle sezioni medie parziali dà la sezione media del fiume nel tronco esaminato; siccome la somma delle portate parziali dà la portata totale del fiume.

Quindi si è raccolto che la sezione media del Tevere nel giorno e nel luogo dell'esperienza era di metri quadrati 218,779; e che la quantità d'acqua che ad ogni minuto secondo vi passava era di metri cubi 244,0554.

Dividendo la portata per l'area della sezione si ottiene la velocità media della corrente del Tevere nel giorno e luogo sopra detto, e risulta tale da percorrere metri 1,115 in un minuto secondo.

RISULTATI DELLE SPERIENZE

Del dì 19 Giugno 1821

In tempo che il fiume Tevere segnava metri 1,17 sotto il piano dell' ultimo gradino al Passo-porto di Ripetta in linea della Fabbrica Doganale.

Linee percorse dalle Aste	Scandaglio ragguagliato: per ciascuna delle linee percorse	Scandaglio ragguagliato: tra due consecutive linee	Distanza media tra due linee consecutive	Prodotto de'numeri marcati nelle colonne 3-4	Velocità delle Aste per 1″ lungo le rispettive linee	Velocità media tra due linee consecutive	Prodotto de'numeri delle colonne 5-7
1	2	3	4	5	6	7	8
Incontro dell'acqua colla ripa...	*m.* 0,00	*m.* 1,285	*m.* 6,16	*m. q.* 7,916	0,000	*m.* 0,555	*m. c.* 4,3934
A a «	2,57	2,82	4,715	13,296	0,555	0,662	8,8020
B b «	3,07	3,08	5,49	16,909	0,769	0,910	15,3872
C c «	3,09	3,135	3,445	10,800	1,052	1,034	11,1672
D d «	3,18	3,162	8,72	27,573	1,016	1,053	29,0344
E e «	3,145	3,212	7,38	23,705	1,090	1,145	27,1422
F f «	3,28	3,422	7,045	24,108	1,200	1,155	27,8447
G g «	3,565	3,98	10,155	40,417	1,111	1,143	46,1966
H h «	4,395	4,442	2,93	13,015	1,176	1,143	14,8761
I i «	4,49	4,46	1,37	6,110	1,111	1,111	6,7882
L l «	4,43	4,43	5,98	26,491	1,111	1,047	27,7361
O o «	4,43	4,455	2,135	9,511	0,983	0,914	8,6931
P p «	4,48	2,24	8,45	18,928	0,845	0,845	15,9942
Incontro dell'acqua colla ripa...	0,00	Sezione media *m. q.*		218,779	0,845		
				Portata del fiume in 1″ *m. cubi*			244,0554

ALTEZZE

Sopra il pelo basso del mare di alcuni punti degli Acquedotti Romani e di altri luoghi dello Stato Ecclesiastico

RILEVATE

Con osservazioni barometriche contemporanee.

Nomi e situazione dei luoghi	Elevazione sopra il pelo basso del mare	Numero e circostanze delle osservazioni	Annotazioni
Acquedotto Paolino o Trajano			
Livello delle sorgenti dell' acqua Trajana	*metri* 159,86	Con due osservazioni contemporanee fatte dal signor professore Barlocci, e dall' ispettore Scaccia il 17 Luglio 1821.	
Livello del Lago di Bracciano o Sabatino, che influisce nell' acquedotto.	151,32	Con due osservazioni dei medesimi del 16 Luglio 1821.	La differenza di livello tra il Lago Sabatino e la Botte di s. Pietro in Montorio forma la pendenza totale dell'acquedotto di m. 75,53 in una lunghezza di circa 52000 metri; che corrisponde a metri 1,45 per ogni mille metri.
Livello della Botte del fontanone di S. Pietro in Montorio in Roma, dove termina l' acquedotto	75,79	Con due osservazioni dei medesimi il 27 Luglio 1821.	
Acquedotto Felice			
Sotto il Colle delle Pantanelle incontro la Colonna, ove sono le più alte sorgenti	210,75	Con due osservazioni del professore Barlocci e dell' ingegnere Donati li 11 Settembre 1821.	
Livello dell'acqua nella Conserva o Rifolta grande esistente nella Tenuta di Pantano	61,67	Con due osservazioni del professore Barlocci e dell' ispettore Gozzi il 25 Settembre 1821.	La differenza di livello tra la Rifolta di Pantano, e la Botte di Termini forma la pendenza totale dell' acquedotto, di metri 9,77 in una lunghezza di circa 33000 metri; che corrisponde a metri 0,296 per ogni mille metri.
Livello della Botte dei fontanoni di Termini in Roma, ove fa capo l'acquedotto	51,90	Con due osservazioni di Barlocci e Scaccia 19 Settembre 1821.	

Nome e situazione dei luoghi	Elevazione sopra il pelo basso del mare	Numero e circostanze delle osservazioni	Annotazioni
Acquedotto Vergine			
Livello delle sorgenti principali nella Tenuta di Salone sotto il Monticello	metri 25,98	Con due osservazioni Barlocci e Scaccia 4 Settembre 1821.	La differenza di questi due livelli forma la pendenza totale dell' acquedotto di metri 7,55 in una lunghezza di circa 16000 metri; che corrisponde a m. 0,471 per ogni mille metri.
Livello della Botte in Piazza di Spagna, ove fa capo l' acquedotto	18,43	Con due osservazioni de'medesimi 18 Settembre 1821.	
Lago Alseatino, o di *Martignano*, vicino al Lago Sabatino	195,49	Con due osservazioni contemporanee di Barlocci e Scaccia il 17 Luglio 1821.	Questi due laghetti sebbene vicini, sono di livello differente, ed ambedue molto più alti del prossimo lago Sabatino.
Lago di *Stracciacappe* vicino al precedente	201,12	*Idem.*	
Lago Regillo presso la via Labicana	103,53	Con due osservazioni Barlocci e Donati 11 Settembre 1821.	Questo laghetto che è un piccolo cratere vulcanico, cresce nell' inverno di mezzo metro e più.
Pelo basso d'acqua corrente nel fiume Nera al Ponte diruto di Augusto sotto Narni	58,65	Con osserv. di Scaccia 24 Marzo 1821 contempor. all'osservazione ordinaria della Specola del Collegio Romano.	
Piano della Cattedrale di Perugia	473,00	Con due osservaz. di Scaccia degli 8 e 9 Settembre 1819 paragonate colle osservazioni della Specola suddetta.	
Piano della Cattedrale di Todi	388,00	Con una osservazione di Scaccia del 23 Marzo 1821 parag. con quella della Specola.	
Piano della Cattedrale di Narni	236,00	Con un'osservaz. del med.° 18 Marzo 1821 paragonata come sopra.	
Otricoli alla soglia della Porta della Città	177,00	*Idem* con due osserv. 17 e 24 Marzo 1821.	

NOTA

Nelle Ricerche della Scuola degl' Ingegneri stampate l' anno scorso 1820 si sono date le altezze di varj stabili di Roma riferite al Sottarco della Cloaca Massima. Per conoscere le altezze de' suddetti stabili sopra il pelo basso del Mare Mediterraneo, giova sapere che il Sottarco della Cloaca Massima è alto sopra il pelo basso del Mare metri 5,907; e non già metri 5,722 come fu notato per isbaglio nel citato libro a cart. 50.

Tav. I
A
L
L
M
N
K
R
S
B
L
M
A
N
S
B
R
2.
O
q
L
L
Y
X
M
A
P
K
Q
B
4.
O

2.
X
Z
M
B
Y
A
D
P

21.
(II)
(I)
(III)
V
M
S
Π′
P′
D′
Π
D
K
P

Tav. 5ª
26
27

Tav. VI

FIUME TEVERE

Fig. 2

Fig. 3

apporto di 1:500